21世纪高等院校教材

空间数据的误差处理

魏克让 江聪世 /编著

科学出版社
www.sciencep.com

(P-1397.0101)

高等教育分社 · **理科编辑部**
联系电话：010-64011132
E-mail:geo-edu@cspg.net

ISBN 7-03-011587-2
9 787030 115874 >

ISBN 7-03-011587-2
定 价：25.00 元

21世纪高等院校教材

空间数据的误差处理

魏克让　江聪世　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是供高等院校信息工程、遥感、航测等专业使用的专业基础课教材。全书共分七章,内容重点在于介绍测绘类空间数据误差分析和处理的基本理论和方法,并根据信息工程、遥感、航测专业学习的需要,阐述了诸如地理空间信息基础、多元统计分析以及空间数据质量控制与抽检等内容。为便于掌握和加深理解课程内容,各章之后均附有思考题与习题。

本书可供高等院校信息工程、遥感、航测专业的师生阅读,也可供相关专业的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

空间数据的误差处理/魏克让,江聪世编著 .—北京:科学出版社,2003
(21世纪高等院校教材)
ISBN 7-03-011587-2

Ⅰ.空… Ⅱ.①魏…②江… Ⅲ.空间测量-误差数据处理-高等学校-教材 Ⅳ.P236

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第049261号

策划编辑:朱海燕 杨 红/文案编辑:孙克玮/责任校对:钟 洋
责任印制:安春生/封面设计:高海英

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2003年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2003年8月第一次印刷 印张:15 1/2
印数:1~3 000 字数:292 000

定价:25.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

前　言

本书是在《观测数据处理》讲义的基础上经多次修改编著的。原稿完成于1991年10月，并投入使用，曾得到李德仁院士的关心与大力支持，在后续的使用过程中于1995年、1999年又先后做了两次修改；根据最新制定的教学计划，本次修改对部分内容又做了增、删。

本书是作为专业基础课教材使用的，立足于为后续的专业课程打好有关数据处理方面的基础。正如在本书第一章引论中所述，随着科学技术和生产手段的飞速发展，数据处理的一些基本方法已为许多学科、专业，许多科研及生产部门广泛地应用。地理信息系统(GIS)是一门集多学科为一体的新兴的边缘科学，在众多领域的开发与建设中发挥着越来越重要的作用，而GIS原理和方法不断充实与发展的过程，是离不开数据处理的有关基础知识的。

本书是从观测分类以及误差产生的内在与外界原因谈起，逐渐深入并展开，在以基本的误差理论和参数估计为重点的基础上，综述了地理空间信息基础的有关内容。同时，还增补了空间数据质量控制与抽样检验等内容。

顾及到信息工程、遥感、航测等专业的特点以及高层学习的需要，作者还选写了多元统计分析的基本内容，这将有助于基于高等统计理论的图像解译、聚类与判别分析等，也是本教材的一个特点。

全书共分七章。第一、二两章主要介绍的是误差的基本理论，讨论的是如何根据观测数据求定某些量在一定的统计意义下的估值以及如何衡量观测值的精度和估值精度的问题。其中，阐述观测值函数精度与观测值精度之间关系的广义传播律，其应用范围极广。

第三章是从较抽象的数学模型推导入手，分别对常用的几种数据处理的原理具体化，给出实用公式和计算方法。

第四章介绍了对正则方程的求解以及对某些特殊观测问题的处理方法，其中的序贯观测与估计是近代估计理论在误差处理方面的一个成功应用。

第五章是地理空间信息基础的有关内容。对地理空间系统的建立、GIS数据质量分析、数据内插、地图投影的基本概念以及空间各种坐标的转换做了必要的介绍。

第六章介绍的是多元统计分析方面的知识，适用于多种专业的需求，是当前专业学习的需要，同时也为进一步深造打下扎实的数学基础。

第七章是以质量控制与数字地图产品的质量检验为主要内容的。“规范”性的文字叙述较多，旨在建立“质量”是GIS生存和发展的保障这一理念。

全书内容是按约60教学学时安排的。根据专业特点，可有所侧重。为叙述力求简单、注重实用，略去了个别复杂证明。

阅读与学习本书内容时，读者若具有“线性代数”与“数理统计”方面的知识将会收到事半功倍的效果。

本教材中引用了许多著作作为参考文献，在此，谨向作者表示衷心感谢。在写作过程中也曾得到有关同仁的支持与帮助，在此表示谢意。

由于水平所限，不当和错误之处在所难免，诚请读者批评、指正。

作　者

2002年岁末于武汉

目　录

第一章　引　　论

第一节　观测概述

一、观测数据处理的意义

观测数据处理方法的研究也同其他学科一样，是根据生产和科学研究实践中对观测数据分析、处理的需要而产生的。

随着科学技术和生产手段的飞速发展，尤其是电子计算机的广泛普及使用，观测数据处理方法的研究也在不断地深入进行。目前，它已成为现代统计数学的一个重要组成部分；数据处理的一些基本方法已为许多学科、专业，许多科研及生产部门广泛地应用。

在生产和科学研究中，人们经常对各种类型的物理量进行观测，而获得大量的观测数据。这仅仅是感性材料，为了对观测结果形成认识上的深化并反映事物内部的规律性，从观测结果中引出科学的结论，必须运用数学方法按照一定的准则对获取的观测数据进行分析、处理，得到可用数学方式表述的某种规律。

为进行具有中国特色的社会主义建设和国防建设，需要规模巨大的人造卫星、大地、海洋测量、航空摄影测量以及经久不断的工程测量工作。这些测量工作都是借助专门的设备与仪器，直接或间接地对所研究的对象进行观测而获得大量的有关数据。通过一系列的数据处理过程，从而确定出地球形状和大小、固体潮变化，海洋定位以及表示地表与大陆架起伏的各种比例尺地形图；也为工程勘察、设计、施工、运营各阶段提供科学依据。

遥感技术是在不直接与被研究对象接触的情况下，利用专门的装置收集被研究物体、地区或现象的数据，通过分析、处理提取和应用有关物体、地区或现象的信息的一种技术。实际上，获取信息的过程就是观测；对所获遥感信息进行辐射校准、几何改正、数据变换、影像增强、数据识别与分类等过程就是数据处理。

21 世纪初，我国已逐渐全面实行土地有偿使用，大量的界址点测量，宗地权属的确定以及土地资源的现状调查与开发前景等工作，都要通过各种观测手段获取大量数据并经过必要的数据处理后，才可为有关的决策部门提供法律和政策上的科学依据。

在通信与控制领域内，分析、处理受噪声污染的信号观测结果以及自动系统的设计问题，也十分重视数据处理的各种估计理论。为此，国内外出版了大量相关

专著。

机械工人在完成某一工件制作过程中，要及时对加工中的工件进行测量，校核加工的质量，以保证工件尺寸及其公差达到设计要求。

对一批产品的抽样检查，统计检验产品的某项技术指标是否符合要求，也可从中分析出生产质量的稳定情况，或考验技术革新中某种新产品的实际效果。

科学实验的过程，也是组织实验项目、观测以及对实验结果分析、处理的过程。

例如，特定的风洞实验，不仅可以对初步设计的飞机机翼进行一系列空气动力学的实验，也可对各种建筑模型、大坝模型等进行实验，测定与分析它们的受力情况，从而进一步修改设计直至定型。实际上，这是一系列空气动力的力学测量与数据处理工作。

长期观测的气象资料是分析、研究天气和气候变化规律的基础，也是农林、水利、建筑等部门在进行生产，规划、设计时所必须参考的。只有根据多年来的观测数据，经过分析、处理才能揭示某一地区气候变化的规律性，同时也为制定这一地区今后气候参数的变化模式提供依据。

在人类步入21世纪的今天，地理信息系统(GIS)这门集多学科为一体的新兴的边缘学科，在测绘、地质矿产、农林水利、气象、海洋、环境监测、城市规划、土地管理、区域开发与国防建设等领域发挥越来越重要的作用。而对GIS原理和方法不断充实与发展的过程中，是离不开数据处理这一方法的。

还可以列举出大量的来自生产和科学实验中的测量及其数据处理的问题。可以说，观测及其结果的精度分析和数据处理这方面的问题，在生产和科学研究的各个方面随时可以遇到。

二、观测的分类

由于观测所采取的方式不同，可分为直接观测和间接观测。

为了测定某一物理量，例如角度和距离，空气的湿度，气流的压力等，我们可以直接用经纬仪、钢尺或测距仪、湿度计、气压表等测取所要观测的量，这是最简单的测量问题，称为直接观测。就是说，这时被观测的量可以直接与其单位尺度进行比较。

有些观测则不然，如为了观测某一建筑物的高度，可以在某个测站上用经纬仪观测该建筑物的垂直角 β，并量取从测站到建筑物的距离 S，由几何关系

$$h = S\cdot\tan\beta \tag{1.1}$$

来确定建筑物的高度 h。在这个例子中，被观测的量 h 是由直接观测量 β 和 S 通过确定的函数关系求得的。这样，高度 h 的测量就称作间接观测。

间接观测在测量实践中是非常普遍的。应该说，绝大多数的测量问题都是通

过间接观测解决的。

在平面控制测量中，为了确定 B 点相对于 A 点的位置，可以先观测出两点间的距离 S_{AB} 与两点间边长所处的方位 α_{AB}，如图 1.1 所示。由几何关系可出求 B 点的相对坐标，有

$$\left.\begin{aligned}\Delta X_{AB} &= S_{AB}\cdot\cos\alpha_{AB}\\ \Delta Y_{AB} &= S_{AB}\cdot\sin\alpha_{AB}\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

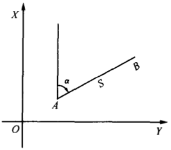


图 1.1

当由两个已知点 A、B 求待定点 P 的平面位置时(图 1.2)，可分别在 A 点与 B 点上直接观测角 β_1 与 β_2，按式(1.3)

$$\left.\begin{aligned}x_p &= \frac{x_1\cot\beta_2 + x_2\cot\beta_1 - y_1 + y_2}{\cot\beta_1 + \cot\beta_2}\\ y_p &= \frac{y_1\cot\beta_2 + y_2\cot\beta_1 + x_1 - x_2}{\cot\beta_1 + \cot\beta_2}\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

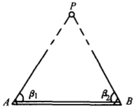


图 1.2

计算。其中(x_1, y_1)和(x_2, y_2)分别为 A 点与 B 点的已知坐标值。

上述这些都是间接观测的例子。实际上，间接观测量是直接观测量的某种函数。

如果被观测的物理量在测量过程中按状态来区分，观测又可分为静态观测和

动态观测。所谓静态观测是指在测量过程中被观测的量是不变的；而动态观测是指在测量过程中被观测的量是变化的。

前面所举的几个例子中，某一建筑物的高度，B 点相对于 A 点的平面位置以及根据两个已知点及直接观测角求待定点的平面位置等，这些被观测的物理量在测量过程中都是不变的，因而也都是静态观测。

再看下面这个例子。当用一台具有漫反射功能的测距仪在岸边观测海上临时抛锚的轮船时，根据观测数据可以确定测站到船体的距离。显然，这样的测量是属于静态观测。然而，如果是用这种仪器跟踪观测行驶在海上的轮船，这时，被观测的量——测站到船体的距离则是变化的，这就属于动态观测。由于测距仪具有直接测距的能力，因而这两者又都是直接观测。

当采用太阳高度法或北极星时角法使用经纬仪进行天文方位角观测时，由于地球除公转外还在不停地自转，那么，测站到太阳(或北极星)的方向与测站到某一点方向之间的夹角则是变化的，这也属于动态观测。虽然经纬仪具有直接测角能力，但被观测量——天文方位角却不能直接获得，因而，这又是动态观测中的间接观测。

尽管可以将测量问题根据其反映矛盾的特殊性分为直接观测和间接观测、静态观测和动态观测，然而，它们又都蕴含着普遍性的问题，即需要解决观测结果的期望值及其精度评定这样一些数据处理问题。

在上面的例子中，测距仪瞄准抛锚船体，测得一组观测数据 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$，这样的测量实际上是对距离这个物理量进行的多次重复观测。按着一般的认识，对这组观测数据 D_i 取算术均值

$$\overline{D}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D_i \tag{1.4}$$

式中：n 为观测次数；$\overline{D}$ 也就是测站到船体距离的期望值，或称估计值、最或然值等。这类问题在后续章节详细讨论。

对于跟踪观测行驶着的船体这种情况，被观测量的性质就不同了。由于船体到测站的距离在不断变化，这时仍然取一段观测数据的算术均值 $\overline{D}$ 就没有多大实际意义了，充其量不过是船体距测站在观测时间 t_1 到 t_2 之间平均距离的一个估计量，且是在轮船行驶轨迹近于直线的条件下才有这个意义，一般情况下，连上述解释都不成立。因此，不能简单地取用算术均值的方法处理。

由于航行过程中每个观测点反映的只是航行过程中在特定时间的某一个状态，n 个观测点$(t_i,D_i)(i=1,2,\cdots,n)$反映的是某一段航行轨迹，人们关心的是对这一段航行轨迹的整体认识，而不是对某一个特定观测点的认识。如果能利用最小二乘原理进行曲线拟合来代替静态观测中的取算术均值，那么首先假定距离随时间的变化是线性的。这样，就可以用一条直线来拟合这组观测数据。设该直

线方程为

$$\hat{D}(t) = a + bt \tag{1.5}$$

如图 1.3 所示,这里欲选择的 a 和 b,应该使直线到各观测点(t_i, D_i)的离差的平方和 Q 为最小,即

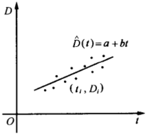


图 1.3

$$Q = \sum_{i=1}^{n}[\hat{D}(t_i) - D_i]^2 = Q_{\min} \tag{1.6}$$

若令

$$\hat{D}(t_i) - D_i = v_i \tag{1.7}$$

(1.6)式又可写成

$$Q = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = [vv] = Q_{\min} \tag{1.8}$$

式中:[ ]称高斯取和符号。

根据求自由极值的方法可知,使 Q 达到最小的必要条件是

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = \frac{\partial Q}{\partial b} = 0 \tag{1.9}$$

由于在 Q 的表达式中各项均非负,因此,Q 对 a 与 b 的二阶偏导数必大于 0,也就是说,Q 必定有一个非负的最小值。

由于

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial a} &= 2\sum(a + bt_1 - D_i) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b} &= 2\sum(a + bt_1 - D_i)t_i = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

解此方程，并令

$$\left.\begin{aligned}\bar{t} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i \\ \bar{D} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i \\ S_1 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i t_i \\ S_2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^2\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

则

$$\left.\begin{aligned}a &= \bar{D} - b\bar{t} \\ b &= \frac{S_1 - \bar{D}\,\bar{t}}{S_2 - \bar{t}^2}\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

这样，利用一组观测数据(t_i, D_i) $(i = 1, 2, \cdots, n)$就可确定出线性方程(1.5)式中的两个参数 a 与b。有关最小二乘法的详细讨论，将在第三章给出。

第二节　误差及其特性

生产与科学研究的实践使人们认识到，任何一种观测都不可避免地要产生误差。也就是说，当对某物理量进行多次观测时，无论仪器有多么精密，观测是何等仔细，各次的观测结果之间总是存在着差异。例如，当对某段距离进行往返丈量时，两次观测的结果并不相同；在大地测量中，三角形是构成平面控制网的基本图形，而观测到的三内角之和一般并不等于理论上应有的 180°。也正是由于观测必然带有误差这个共同的特点，这就决定了观测数据的处理不同于一般的数学问题。如上面提到的三角形测量中，从几何上讲，一个平面三角形只要观测其中的任意两个内角就完全可以决定其形状，然而，从观测这个特点上讲，就应该观测全部内角，使观测增加可靠性，然后再根据一定的准则经过合理地分配误差再决定出三角形的最终形状。这是各种专业的测量问题所特有的、区别于一般数学问题的特点。

产生误差的原因，大体有如下三个方面：

一是测量仪器不准确，存在误差；

二是观测者的感觉器官鉴别不准确；

三是观测时所处外界条件的影响。

概括地讲,前两个是观测误差产生的内在原因,后一个是外界原因。

全部测量工作的中心,不外采用种种办法尽可能地消除或减少误差对观测结果的影响,提高和合理地分配观测与期望值的精度。因此,可以形象地讲,观测及其数据处理的过程也就是减小误差的过程。

为了掌握误差出现的规律及其对观测结果准确性的影响,应按误差的性质进行分类以便采取不同的方法加以处理。

随机误差　在一定的观测条件下进行了一系列的观测,如果观测误差其数值大小和符号都是不定的,不存在任何确定的规律性,它只具有统计性的规律,那么这种误差称为随机误差。

随机误差的产生取决于测量进行中一系列随机性因素的影响。所谓随机性因素是指观测者或实验者不能加以严格控制的因素。

自然界是永不休止的变化与发展着的客观世界,一切事物包括"一定的观测条件"在内,它始终是在某种范围内变化着。尽管从表面看"观测条件相同",但实际上观测的外界条件,如湿度、温度、空气振动等的瞬间变化,使得每次观测都要受到这些外界条件的随机扰动而带来随机误差。用无线电或雷达设备进行测量时,电磁波的随机干扰,光学测量中的照准误差等,都是产生随机误差的来源。至于观测人员,也要时刻受到自身健康状况、情绪高低以及外界的干扰,使其在各时间段工作成效不完全一致。可见,随机误差在观测过程中是不可避免的。

偶然误差　在一定的观测条件下进行的一系列观测,如果观测的误差是随机误差,且误差的算术均值随观测次数的增加而趋于零,则称这种误差为偶然误差。可见,偶然误差是均值为零的随机误差。

任何一个观测量,客观上总是存在着一个能代表其真正大小的数值,这一数值就称为观测量的真值。若记某一观测量的真值为 L,观测值为 $l_i(i = 1,2,\cdots,n)$,则观测值与其真值之间的差数为

$$\Delta_i = l_i - L \tag{1.13}$$

式中:Δ_i 称为观测值的真误差。

根据概率与数理统计的观点,这里的真误差仅仅是指偶然误差,因此有

$$\left.\begin{aligned} E(l) &= L \\ E(\Delta) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

也就是说,观测值的数学期望就是真值;真误差或称偶然误差的均值为零。

通过对偶然误差长期的大量研究,可以用概率的术语概括出偶然误差的几个

特性：

1）在一定的观测条件下，误差的绝对值有一定的限值，即

$$P(|\Delta|>\Delta_{限})=0$$

2）绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大，即

$$P(|\Delta|_{小})>P(|\Delta|_{大})$$

3）绝对值相等的正负误差出现的概率相同，即

$$P(|\Delta_{+}|)=P(|\Delta_{-}|)$$

4）偶然误差的数学期望（均值）为零，即

$$E(\Delta)=\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0$$

对于一系列的观测而言，不论其观测条件如何，也不论是对同一个物理量还是对不同的物理量进行观测，只要是在相同的条件下观测的，则产生的一组偶然误差必然都具有上述4个特性。

系统误差　在一定的观测条件下进行了一系列观测，如果观测的误差其数值大小和符号或保持为常数，或按照一定的规律变化，例如它是某些参数（温度或时间等）的函数，这种带有系统性和方向性的误差称为系统误差。

系统误差的产生一般也与测量仪器本身，观测者本身及观测时的外界条件等因素有关。

例如仪器没有调整好零位，观测结果出现偏高或偏低的情况，这是仪器系统误差中最常见的一类，一般称零位误差。

仪器制造不够完善，或工作前未经检验校正，或校正后的剩余偏差等都会给观测带来系统误差。

大气折光、重力异常、电磁波干扰等也是产生系统误差的重要因素。

其次，观测者的习惯性视差也是产生系统误差的原因。

在测量工作的整个过程中，除了上述误差以外，还可能发生错误。错误的发生多数是由于工作中的粗心大意造成的。错误的存在破坏了观测结果的可靠性，致使返工造成浪费，工作中应竭力避免。因此，错误一般不按观测误差计。

最后指出，在一个具体的观测问题中，偶然误差和系统误差经常是同时发生

的。应尽力分析系统误差的各个方面而加以消除或校正，使其对观测结果的影响尽量减少。当观测列中已经排除了系统误差的影响，或者与偶然误差相比已处于次要地位，则该观测列中主要是存在着偶然误差。这样的观测结果和偶然误差都是属随机变量，如何处理这些随机变量是本课程主要讨论的内容。

第三节　精度估计的标准

观测过程中经常出现的偶然误差和系统误差，由于它们的性质不同对观测结果所起的作用也不同。

如果在一个观测列中，系统误差呈显著性，偶然误差成分很小，这时，观测数据 l_i 表现出重复性很强，围绕着 $\overline{L}$ 很密集，但离真值 L 却较远(图 1.4)。相反地，如果偶然误差呈显著性，不含系统误差或小到可以忽略不计。这时，观测数据 l_i 表现出重复性很差，围绕着 $\overline{L}$ 很分散，但离真值 L 较近(图 1.5)。

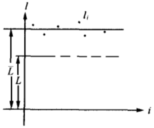


图 1.4

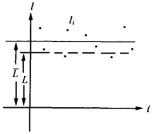


图 1.5

为区别上述情况，可引入精密性和准确性两个概念。前者指观测数据的离散程度，它取决于偶然误差的作用；后者指观测数据的准确程度，它取决于所有误差成分在内的总的误差的作用。由上例可见，精密性高的观测数据并非准确性也好，反之也可能。只有当观测结果中仅含偶然误差而不含或很少含系统误差时，才可以认为精密性高的观测数据准确程度也高，反之亦然。此时，可以用精度这个概念来概括精密性和准确性。

所谓精度，就是指误差分布的密集或离散的程度。如果两组观测误差分布相同，便是两组观测数据的精度相同，反之亦成立。同一观测条件下进行的一组观测对应着同一的误差分布，因此，这组的每个观测值都是等精度观测值，而不论其个别误差是大还是小。

为了衡量观测值精度的高低，可以列表或用几何方法表示(如直方图或误差分布曲线等)，但在实际工作中，人们总是希望对精度有一个数字特征，用具体数值的大小来反映误差分布的离散程度。下面介绍几种常用的精度指标。

一、方差和中误差

由中心极限定理可知，当讨论诸多随机因素总和的极限分布时，只要那些因素对总和的影响均匀地小，而且又是相互独立的，一般地，诸多随机因素总和的分布将是正态的，取其概率密度函数，有

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}) \tag{1.15}$$

式中：σ^2 为误差分布的方差。由方差定义知

$$\sigma^2 = D(\Delta) = E[\Delta - E(\Delta)]^2 \tag{1.16}$$

由于

$$E(\Delta) = 0$$

则

$$\sigma^2 = E(\Delta^2) = \lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta\Delta]}{n} \tag{1.17}$$

因此，有

$$\sigma = \sqrt{E(\Delta^2)} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{1.18}$$

亦称误差分布的方根差 σ 为观测的中误差。

(1.17)、(1.18)两式表示的是理论值，实际上观测个数 n 总是有限的，由有限个真误差求得的方差和中误差只能是估(计)值$\hat{\sigma}^2$ 与$\hat{\sigma}$，即

$$\left.\begin{aligned} m^2 &= \hat{\sigma}^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{n} \\ m &= \hat{\sigma} = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

这就是根据一组等精度真误差计算方差和中误差估值的基本公式。

二、平均误差

在一定的观测条件下，一组独立的真误差绝对值的数学期望称为平均误差。设以 θ 表示平均误差，则有

$$\theta = E(|\Delta|) = \lim_{n\to\infty}\frac{[|\Delta|]}{n} \tag{1.20}$$

这里，不加证明地给出

$$\begin{aligned}\theta &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \approx 0.7979\sigma \approx \frac{4}{5}\sigma \\ \sigma &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta \approx 1.253\theta \approx \frac{5}{4}\theta\end{aligned} \tag{1.21}$$

由于观测个数 n 总是有限的，因此在实用上也只能用 θ 的估值$\hat{\theta}$来衡量精度，即

$$\theta = \hat{\theta} = \frac{[|\Delta|]}{n} \tag{1.22}$$

前已述及，中误差与平均误差都可以作为评定精度的指标。当 n 不大时，几何均值较算术均值更能灵敏地反映较大真误差对观测成果的影响，因此，中误差已作为各国统一采用的衡量精度的指标。

顺便指出，上述是分别采用了不同符号来表示它们的理论值和估值，在不需要特别强调“估值”意义的情况下，本教材在后面的叙述中对符号有时不加严格区分。

三、极限误差

根据概率论和无数的实践证明，在一组大量的同精度观测中，偶然误差 Δ 落在区间 $(-\sigma,\sigma)$，$(-2\sigma,\ +2\sigma)$，$(-3\sigma,\ +3\sigma)$ 之间的概率分别为

$$
\left.\begin{aligned}
P(|\Delta| \leqslant \sigma) &= 68.3\% \\
P(|\Delta| \leqslant 2\sigma) &= 95.5\% \\
P(|\Delta| \leqslant 3\sigma) &= 99.7\%
\end{aligned}\right\} \tag{1.23}
$$

可见，绝对值大于 2 倍中误差的偶然误差出现的概率为 4.5%，即信度为 0.045；而绝对值大于 3 倍中误差的偶然误差是极少数，其出现的概率仅有 0.3%。根据小概率事件不可能原理，通常以 3 倍的中误差作为偶然误差的限值(阈值)，并称其为极限误差，即

$$
\Delta_{限} = 3\sigma \tag{1.24}
$$

由于实际工作要求的不同，有时也采用 2σ 作为极限误差。当以中误差估值 m 代替 σ 时，即 $3m$ 或 $2m$ 作为极限误差。

观测中，如果某个误差超过了极限误差，那就认为它是粗差或是错误，相应的观测数据应剔除或摒弃。

中误差 m 虽然不能代表某一个别误差 Δ 的大小，但用限差 $3m$（或 $2m$）可以估计出误差 Δ 的实际可能范围，因此，在产品或工序的质量控制中作为控制上、下限值。

四、相对误差

对于某些观测结果，单靠中误差还不能完全表达观测结果的好坏。例如，观测了 1000m 及 80m 的两段距离，观测的中误差均为 ±2cm，两者的中误差相同，但就单位长度而言，两者精度不等，显然前者的相对精度比后者要高。此时，须采用另一种办法来衡量精度，通常采用相对中误差，它是中误差与观测值之比。如上述两段距离，前者的相对中误差为$\frac{1}{50\,000}$，而后者为$\frac{1}{4000}$。

相对中误差是个无名数，习惯上一般将分子化为 1，用$\frac{1}{N}$表示。

对于真误差与极限误差，有时也用相对误差表示。在有关的测量规范中规定经纬仪导线相对闭合差不能超过$\frac{1}{2000}$，指的就是相对极限误差，观测中产生的相对闭合差则是相对真误差。

与相对误差相应的，将真误差、中误差、极限误差等统称为绝对误差。

第四节　协方差传播律

在第一节中已指出，绝大多数的测量问题都是通过间接观测取得的。当某些量不能直接测定时，就必须要由一个或一系列的其他直接观测值，通过一定的函数关系间接计算出来。那么，观测值函数的中误差与观测值的中误差之间存在着怎样的关系？阐述这种关系的公式则称为误差传播律。又由于中误差是方差的方根，故也称协方差传播律。由于概率论与数理统计一类书中，对方差依其性质或运算法则的形式做过一些介绍，这里仅做进一步的阐述和扩充。

一、协　方　差

协方差也是用数学期望来定义的，是用来描述两个或多个随机变量之间关系的一个数字特征。设有观测值 X 和 Y，则它们的协方差为

$$\sigma_{XY} = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \tag{1.25}$$

由于

$$\left.\begin{aligned} X - E(X) &= \Delta_X \\ Y - E(Y) &= \Delta_Y \end{aligned}\right\}$$

故

$$\sigma_{XY} = E(\Delta_X \Delta_Y) \tag{1.26}$$

式中：Δ_X、Δ_Y 分别为 X 与 Y 的真误差。

根据数学期望的定义，(1.26)式又可写为

$$\sigma_{XY} = \lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta_X \Delta_Y]}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\Delta_{X1}\Delta_{Y1} + \Delta_{X2}\Delta_{Y2} + \cdots + \Delta_{Xn}\Delta_{Yn}) \tag{1.27}$$

因实际上 n 总是有限值，所以协方差估值为

$$m_{XY} = \hat{\sigma}_{XY} = \frac{[\Delta_X \Delta_Y]}{n} \tag{1.28}$$

有时也用相关系数来表示协方差。观测值 X 和 Y 的相关系数ρ_{XY}是下面量纲为 1 量：

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{1.29}$$

式中：σ_X、σ_Y分别为X、Y的中误差，相关系数 ρ_{XY} 是界于 −1 和 +1 之间的数，即 $-1 \leqslant \rho_{XY} \leqslant 1$。

相关系数表示两个随机变量间的线性依赖性。不难理解，当

$$\rho_{XY} = 0$$

时

$$\sigma_{XY} = 0$$

表示这两个(或两组) 观测值之间联系弱，或者说，它们的误差是不相关的，并称这样的观测值为不相关观测值。当

$$\rho_{XY} \neq 0$$

时

$$\sigma_{XY} \neq 0$$

则表示它们的误差是相关的，称这样的观测值为相关观测值。对于服从正态分布的观测值而言，“不相关”与“独立”是等价的。所以把不相关的观测值也称为独立观测值，反之亦然。

在测量工作中，直接观测得到的高差、距离、角度和方向等，都是独立观测值。一般来说，独立观测值的各个函数之间是不独立的，因而它们是相关观测值。例如，一个测站上各水平方向观测值是独立的，但由这些方向计算的各个相邻角度却是相关观测值；又如，三角网或导线网中根据观测角度和边长求得的各点坐标也是相关观测值。

二、线性函数的方差——协方差

设有线性函数

$$Z = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i \tag{1.30}$$

式中：k_i 为常数；x_i 为相关观测值，它们的方根差和协方差分别为 σ_i、$\sigma_{ij}(i \neq j)$。

根据方差运算的加法定理，则

$$\sigma_Z^2 = D(\sum_{i=1}^{n} k_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 D(x_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} k_i k_j \sigma_{ij} \tag{1.31}$$

当各观测值 x_i 两两独立时，$\sigma_{ij} = 0$，此时

$$\sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \sigma_i^2 \tag{1.32}$$

如果将各观测分量的方差和两两之间的协方差以其估值代之，相应地则有

$$m_Z^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 m_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} k_i k_j m_{ij} \tag{1.33}$$

当

$$m_{ij} = 0$$

时

$$m_Z^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 m_i^2 \tag{1.34}$$

为讨论问题方便，也可将以上各式写成矩阵形式。观测值的线性函数为

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{KX} \tag{1.35}$$

式(1.35)中的观测值向量和常数行向量分别为

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{K} = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$$

函数 $\boldsymbol{Z}$ 的方差为

$$\boldsymbol{D}_{zz} = \sigma_z^2 = \boldsymbol{K}\boldsymbol{D}_{xx}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \tag{1.36}$$

式中:

$$\boldsymbol{D}_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \tag{1.37}$$

为观测值的协方差阵。显然,当各观测值独立时,(1.37)式变为对角阵,即

$$\boldsymbol{D}_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_n^2) \tag{1.38}$$

例[1.1]:量得圆的半径 $R = 50.03\mathrm{m}$,观测中误差 $m_R = \pm 2.7\mathrm{mm}$,求圆周长的中误差和相对中误差。

解：

$$C = 2\pi R = 314.19(\mathrm{m})$$

$$m_c = 2\pi m_R = \pm 16.96(\mathrm{mm})$$

$$\frac{m_c}{C} = \frac{m_R}{R} = \frac{1}{18\ 500}$$

例[1.2]：用 30m 的钢尺往返丈量一段距离，得 $D_{往} = 269.95\mathrm{m}$，$D_{返} = 269.99\mathrm{m}$。如果一整尺段丈量的中误差为 ±1cm，问往、返测结果的中误差、往返均值的中误差以及相对中误差各是多少？

解：令一整尺段长为 l，中误差 $m_l = \pm 1\mathrm{cm}$，根据题意有

$$D_{往} = \sum_{i=1}^{9} l_i$$

$$m_{D_{往}}^2 = m_{l_1}^2 + m_{l_2}^2 + \cdots + m_{l_9}^2$$

而

$$m_{l_1} = m_{l_2} = \cdots = m_{l_9} = m_l$$

所以

$$m_{D_{往}} = m_{D_{返}} = \sqrt{9} m_l = \pm 3(\mathrm{cm})$$

由于

$$D = \frac{1}{2}(D_{往} + D_{返}) = 269.97(\mathrm{m})$$

那么

$$m_D = \frac{m_{D_{往}}}{\sqrt{2}} = \pm 2(\mathrm{cm})$$

因此

$$\frac{m_D}{D}=\frac{0.02}{269.97}=\frac{1}{13\,498.5}\approx\frac{1}{13\,000}$$

例[1.3]：如图 1.6 所示，观测角 β_1 和 β_2 的中误差 $m_1=m_2=\pm1.4$ 角秒，协方差 $m_{1,2}=-1$ 角秒^2。如果 $\angle BAC=\alpha$ 无误差，求角 β_3 的中误差。

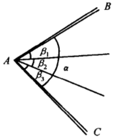


图 1.6

解：

$$\beta_3=\alpha-\beta_1-\beta_2=\begin{bmatrix}-1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}+\alpha$$

据题意知

$$\hat{\boldsymbol{D}}_{\beta\beta}=\begin{bmatrix}m_1^2 & m_{1,2}\\ m_{2,1} & m_2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.96 & -1\\ -1 & 1.96\end{bmatrix}$$

由(1.36)式，得

$$m_{\beta_3}^2=\begin{bmatrix}-1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.96 & -1\\ -1 & 1.96\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix}=1.92$$

所以

$$m_{\beta_3}=\pm1.4\text{ 角秒}$$

三、非线性函数的情况

设有观测值 X 的非线性函数

$$Z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{1.39}$$

已知 $\underset{n\times1}{\boldsymbol{X}}$ 的协方差阵 $\boldsymbol{D}_{XX}$。由数学分析可知,变量的误差与函数的误差之间的关系可以近似地用全微分来表示。为此,求函数的全微分,并以 Δz 代 $\mathrm{d}z$、Δx_i 代 $\mathrm{d}x_i$,即

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n \tag{1.40}$$

式中:$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 是函数 f 对各观测值 x_i 所取的偏导数,以观测值代入并算出它的数值。它们都是常数。因此

$$\boldsymbol{K} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

$$\Delta \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$$

(1.40)式又可写成

$$\Delta z = \boldsymbol{K}\Delta \boldsymbol{x} \tag{1.41}$$

这样,就将非线性函数式(1.39)化成了线性函数式(1.35)的形式。

不难理解,由于

$$D(\Delta z) = D(Z), D(\Delta x) = D(X)$$

因此,可按(1.36)式求得非线性函数 Z 的协方差

$$\boldsymbol{D}_{zz} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{D}_{xx}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \tag{1.42}$$

当然,对上述过程也可将非线性函数 Z 按泰勒级数展开,略去二次以上各项取得线性形式,这里不再赘述。

例[1.4]:已知

$$Z = 4X_1X_2 + \frac{X_1}{2}$$

如果 X_1、X_2 的中误差为 m_1、m_2,求 m_z。

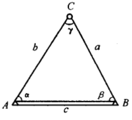


图 1.7

解:对函数 Z 取全微分,有

$$\frac{\partial Z}{\partial X_1} = 4X_2 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_2} = 4X_1$$

由(1.42)式,得

$$m_z^2 = (4x_2 + \frac{1}{2})^2 m_1^2 + (4X_1)^2 m_2^2$$

例[1.5]:如图 1.7 所示三角形,测得

$$\alpha = 40°10'30'' \pm 10''$$

$$\beta = 50°05'50'' \pm 20''$$

$$c = 150.00 \pm 0.05(\mathrm{m})$$

求 b 边的长度及其相对中误差。

解:边长 b 可按下式计算

$$b = C\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 115.07(\mathrm{m})$$

式中：

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 89°43'40''$$

为计算 m_b，可直接对函数式取全微分，为了计算简单，也可先取对数再求全微分。则

$$\ln b = \ln c + \ln\sin\beta - \ln\sin\gamma$$

$$\frac{\mathrm{d}b}{b} = \frac{\mathrm{d}c}{c} + \cot\beta\mathrm{d}\beta - \cot\gamma\mathrm{d}\gamma$$

由于

$$\mathrm{d}r = -\mathrm{d}\alpha - \mathrm{d}\beta$$

代入上式并整理，得

$$\mathrm{d}b = \frac{b}{c}\mathrm{d}c + b\cot\gamma\mathrm{d}\alpha + b(\cot\beta + \cot\gamma)\mathrm{d}\beta$$

应用协方差传播律，得

$$m_b^2 = b^2\left\{\frac{m_c^2}{c^2} + \cot^2\gamma m_\alpha^2 + (\cot\beta + \cot\gamma)^2 m_\beta^2\right\}$$

将已知数据代入上式即可计算 m_b 之数值。但应指出，式中的 $\mathrm{d}\alpha$ 与 $\mathrm{d}\beta$ 是以弧度为单位的，由于给出的角度中误差是以秒为单位的，则应除以 $\rho(= 206\ 265)$ 化为弧度单位。也可将上式写为

$$m_b^2 = b^2\left\{\frac{m_c^2}{c^2} + \cot^2\gamma(\frac{m''_\alpha}{\rho''})^2 + (\cot\beta + \cot\gamma)^2(\frac{m''_\beta}{\rho''})^2\right\}$$

代入数据后,得

$$m_b^2 = 15.6(\text{cm}^2)$$

所以

$$m_b = 4(\text{cm}), \qquad \frac{m_b}{b} = \frac{4}{11\,507} \approx \frac{1}{2800}$$

例[1.6]:已知

$$X = L_1 + L_2, \qquad Y = \frac{L_1 + L_2}{2}, \qquad Z = X \cdot Y$$

设 L_1、L_2 的中误差均为 m,试求 X、Y、Z 的中误差。

解 1:由于 L_1 与 L_2 相互独立,显然

$$m_x = \sqrt{2}\, m$$

$$m_y = \frac{m}{\sqrt{2}}$$

但 X 与 Y 是不独立的,是相关观测值。X 与 Y 的协方差 m_{XY} 应为

$$m_{XY} = \lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta_X \Delta_Y]}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}[(\Delta_1 + \Delta_2)^2]}{n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta_1^2]}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta_2^2]}{2} \right) + \lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta_1 \Delta_2]}{n}$$

上式中的最后一项,由于 Δ_1 与 Δ_2 是相互独立的偶然误差,其协方差 $m_{1,2} = 0$。则

$$m_{XY} = \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2) + 0 = m^2$$

因此，X 与 Y 的方差、协方差阵为

$$D_{XY} = \begin{bmatrix} 2m^2 & m^2 \\ m^2 & \frac{m^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} m^2$$

对函数 Z 取全微分，得

$$\mathrm{d}Z = Y\mathrm{d}X + X\mathrm{d}Y = (Y \quad X)\begin{bmatrix} \mathrm{d}X \\ \mathrm{d}Y \end{bmatrix}$$

根据协方差传播律，则

$$D_Z = (Y \quad X)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} m^2$$

$$= (2Y^2 + 2XY + 0.5X^2)m^2 = 2(L_1 + L_2)^2 m^2$$

所以

$$m_Z = \sqrt{2}(L_1 + L_2)m$$

解 2：为避免求 X 与 Y 的协方差，可先对相关观测值 X 与 Y 进行变量代换，使函数 Z 中各自变量为相互独立变量，则

$$Z = XY = \frac{1}{2}(L_1 + L_2)^2$$

取全微分

$$dZ = (L_1 + L_2)dL_1 + (L_1 + L_2)dL_2 = [(L_1 + L_2) \quad (L_1 + L_2)] \begin{bmatrix} dL_1 \\ dL_2 \end{bmatrix}$$

$$D_Z = (L_1 + L_2 \quad L_1 + L_2) \begin{bmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 + L_2 \\ L_1 + L_2 \end{bmatrix} = 2(L_1 + L_2)^2 m^2$$

所以

$$m_Z = \sqrt{2}(L_1 + L_2)m$$

通过以上算例可以看出：

1) 非线性函数的协方差计算，应首先对函数求全微分，使非线性函数化成线性函数形式，然后即可按(1.36)式计算。

2) 如果函数的自变量是相关观测值，则应求出各变量之间的协方差；或用变量代换，经合并同类项及移项等方法使之成为独立观测值，然后再按(1.36)式计算。

3) 对有些函数可先取对数再微分，则较为方便。

4) 用数值代入计算时，应注意公式中各项量纲及单位的统一。

第五节　误差合成

在观测与实验中，人们总是设法尽量消除和减弱系统误差影响，使偶然误差占主要成分。但系统误差在实际工作中是普遍存在着的，完全消除其影响是很困难甚至不可能的，因此，除了研究偶然误差对观测结果的影响规律外，还应研究偶然误差与系统误差共同影响下如何进行精度估计的问题。

偶然误差与系统误差的合成影响，在各种测量问题中都有着一定的应用，它不仅包括同一个量的观测值中既含偶然误差 Δ 又含系统误差 λ 的情况，也包括所有实验结果中含 k 组偶然误差和 l 组系统误差这样一类问题。

设某个量观测值的真误差为 δ_i，$i = 1, 2, \cdots, n$。假定每个 δ 值中既含偶然误差

Δ，又含系统误差 λ，则

$$\delta_i = \Delta_i + \lambda_i \tag{1.43}$$

根据方差、协方差定义

$$\frac{[\delta^2]}{n} = \frac{[\Delta^2]}{n} + \frac{[\lambda^2]}{n} + 2\frac{[\lambda\Delta]}{n}$$

且

$$m_{\Delta\lambda} = \frac{[\lambda\Delta]}{n} = 0$$

所以

$$m_\delta^2 = m_\Delta^2 + m_\lambda^2 \tag{1.44}$$

式中：m_Δ 为偶然中误差；m_λ 为系统中误差。

实际工作中，常常认为：若偶然误差与系统误差的两个误差源中，有一个来源的中误差不超过另一个的 2/10 ~ 3/10，那么，在估计观测精度时该误差源可以忽略不计。

例如，设系统中误差仅为偶然中误差的 2/10，即

$$m_\lambda = 0.2m_\Delta$$

则

$$m_\delta^2 = m_\Delta^2 + 0.04m_\Delta^2 = 1.04m_\Delta^2$$

$$m_\delta \approx 1.02m_\Delta$$

也就是考虑系统误差影响时，使观测值结果的中误差只增大 2%；若当 $m_\lambda = 0.3m_\Delta$ 时，也只增大 4.4%。

系统误差是固定的或服从某一函数规律的误差，它常又可分为系偶误差、常差及不定常差等部分。常差与不定常差本应在观测或实验结果中直接加以修正，出于某些原因(如因数值过小)未予修正而做误差处理。所谓系偶误差是一种带偶然性的系统误差，其值可大可小，可正可负，但在误差传递过程中是按系统误差线性积累的。因此，多次测量时均值的影响和一次测量的影响是一样的，并不减少，也没有抵偿性。

设某观测结果的真误差是由 k 组偶然误差与 l 组系统误差组成的，即

$$\delta_i = \Delta_{1i} + \Delta_{2i} + \cdots + \Delta_{ki} + \lambda_{1i} + \lambda_{2i} + \cdots + \lambda_{li}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.45}$$

如果这里的各组系统误差主要指的是系偶误差，则它们与偶然误差的合成仍可按和方根法，即

$$m_\delta^2 = \sum_{i=1}^{l} m_{\lambda_i}^2 + \sum_{i=1}^{k} m_{\Delta_i}^2 + 2\sum_{i<j}^{k-1,k} m_{\Delta_{ij}} \tag{1.46}$$

式中：$m_{\Delta_{ij}}$ 为各偶然误差相互间的协方差。如果各偶然误差是相互独立的，则

$$m_\delta^2 = \sum_{i=1}^{l} m_{\lambda_i}^2 + \sum_{i=1}^{k} m_{\Delta_i}^2 \tag{1.47}$$

如果对(1.45)式中的系统误差部分只取三组(即令 $l = 3$)，其中用 $\lambda_{\mathrm{I}i}$、$\lambda_{\mathrm{II}i}$ 及 $\lambda_{\mathrm{III}i}$ 分别表示系偶误差、不定常差及常差，此时的误差合成为

$$m_\delta = \sum m_{\lambda_{\mathrm{III}i}} \pm \left(\sum m_{\lambda_{\mathrm{II}i}} + \sqrt{\sum m_{\lambda_{\mathrm{I}i}}^2 + \sum m_{\Delta_i}^2 + \text{相关项}} \right) \tag{1.48}$$

式中：根号内的相关项指各偶然误差之间的协方差项，当各偶然误差之间相互独立时，该项为零，即

$$m_\delta = \sum m_{\lambda_{\mathrm{III}i}} \pm \left(\sum m_{\lambda_{\mathrm{II}i}} + \sqrt{\sum m_{\lambda_{\mathrm{I}i}}^2 + \sum m_{\Delta_i}^2} \right) \tag{1.49}$$

采用上述误差合成的方法，即可求出一次观测或实验的精度，也可求出多次观

测或实验后均值的精度。两者惟一的区别在于，均值的精度中偶然误差对它的影响仅是一次观测或实验的影响的 $\frac{1}{\sqrt{n}}$（n 为观测次数）倍，而系偶误差，不定常差及常差，由于它们的性质在多次实验时是固定不变的，因此，均值的综合误差应为

$$m_{\delta} = \sum m_{\lambda_{\mathrm{III}i}} \pm \left\{ \sum m_{\lambda_{\mathrm{II}i}} + \sqrt{\sum m_{\lambda_{\mathrm{I}i}}^{2} + \sum \left(\frac{m_{\Delta_i}}{\sqrt{n}} \right)^{2} + \text{相关项}} \right\} \tag{1.50}$$

或

$$m_{\delta} = \sum m_{\lambda_{\mathrm{III}i}} \pm \left\{ \sum m_{\lambda_{\mathrm{II}i}} + \sqrt{\sum m_{\lambda_{\mathrm{I}i}}^{2} + \sum \left(\frac{m_{\Delta_i}}{\sqrt{n}} \right)^{2}} \right\} \tag{1.51}$$

可见，只有当观测或实验中没有任何系统误差的影响时，才可认为通过多次观测或实验可以减少误差的影响，提高精度。事实上，系统误差是不可避免的，只要观测或实验的次数足够大，就可以使误差减少到理想小的那种说法，无论在理论上或实验中都被证明是错误的。指出这一点也是非常重要的，为了提高观测结果的准确度，只能是尽量减少和削弱系统误差的影响，而不能局限于通过多次观测来减少偶然误差。

思考题与习题

1．误差产生的原因有哪些？随机误差与偶然误差的关系是什么？

2．偶然误差有哪些特性？

3．精度的含义是什么？表示精度的方法有哪些？

4．设有两组观测误差，分别为

Ⅰ：$-3,\ 0,\ +2,\ +3,\ -2,\ +1,\ -1$；

Ⅱ：$0,\ -1,\ +5,\ 0,\ -6,\ 0,\ +1$。

试用中误差和平均误差的指标计算出各自的观测精度，并指出哪组观测质量好些，从中可以得到什么结论？

5．在相同的观测条件下，对某个物理量进行了多次观测，其中误差大的要比误差小的观测精度要低，这说法对吗？为什么？

6．两段距离及其观测的精度分别为

$S_1 \pm m_{s_1} = 200.465\text{m} \pm 3.5\ \text{mm}$

$S_2 \pm m_{s_2} = 400.894\text{m} \pm 3.5\ \text{mm}$

问：这两段距离的真误差是否相等？

这两段距离的最大限差是否相等？

这两段距离的绝对精度是否相等？

这两段距离的相对精度是否相等？

7. 在某一导线点上，使用 J_6 型仪器观测角度一测回，用 5 + 5ppm 的测距仪观测 300m 左右的边长，问二者的观测精度是否匹配。

8. 已知 l_1 与 l_2 的观测中误差皆为 m，设 $x = 2l_1 + 5, y = l_1 - 2l_2$，求 $t = x + y$ 和 $z = xy$ 的中误差（l_1 与 l_2 相互独立）。

9. 已知边长 S 和方位角 α 的观测精度分别为 m_S 和 m_α，试求坐标增量 $\Delta y = S\sin\alpha$ 的精度。

10. 已知观测向量 $\underset{3\times1}{\boldsymbol{L}}$，其协方差矩阵为

$$\boldsymbol{D}_{LL} = \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

求函数

(1) $$F_1 = l_1 + 2l_2 - 3l_2$$

(2) $$F_2 = l_1 + 3l_2l_3$$

的方差。

11. 如果上题中的协方差矩阵为

$$\boldsymbol{D}_{LL} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

求函数

(1) $$F_1 = 3l_2 - 2l_3$$

(2) $$F_2 = l_1^2 + l_3^{0.5}$$

的方差。

12. 测量一矩形地块，得长、宽的观测值分别为 $l_1 = 85\text{m}$，$l_2 = 60\text{m}$，若要求面积的中误差 $m_s \leqslant \pm 0.5\ \text{m}^2$，并假定长、宽观测值的误差对面积精度产生的影响是等量的，那么长、宽观测值所需的观测精度应是多少？

13. 据分析，图根点点位中误差 $m_{图}$ 包括有图根点的测定误差 $m_{测}$、方格网的绘制误差 $m_{格}$ 和图根点的展绘误差 $m_{展}$，其中 $m_{测}$、$m_{格}$ 均取图上 $\pm 0.1\text{mm}$，图根点展点时，纵横坐标方向各含 $\pm 0.1\ \text{mm}$ 的截距和连线误差，那么图根点点位误差究竟有多大？

第二章　基本观测问题的处理

第一节　算术均值及其精度

由前一章的内容可知，无论是哪一种测量问题，由观测或实验而得到的观测数据，都围绕着三个方面的问题要解决：

1）根据观测数据求定某些量在一定统计意义下的估值；

2）衡量观测数据的精度；

3）衡量估值的精度。

这里，先讨论一个观测量的情况，对它直接或间接的重复观测而获得了多个观测数据，应该如何进行数学处理。

设重复观测了某一物理量，获得一组观测数据 $l_1, l_2, \cdots, l_n$，由真误差的定义，有

$$\Delta_i = l_i - L \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

式中：Δ_i 为各观测值的真误差。

对上式两边取和除以 n，得

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{[l]}{n} - L$$

根据偶然误差的特性

$$\frac{[\Delta]}{n} \Rightarrow 0$$

因此

$$\overline{L} = L = \frac{[l]}{n} \tag{2.1}$$

可见，在相同的观测条件下，对一个量进行多次观测，那么求该量估值的最合理方法就是取所有观测值的均值。实际上，人们早就这样一般认为，1801 年高斯就是以“算术平均值是最可靠的数值”作为公理而导出最小二乘原理的。

由概率与数理统计中的最大似然法也可得出如上结论。

由于各 Δ_i 是互相独立的，这组观测数据的似然函数应为

$$\Phi(l_1,\cdots,l_n;L) = \prod_{i=1}^{n} f(l_i;L) \tag{2.2}$$

由观测误差的正态性，有

$$f(l_i;L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{l_i - L}{\sigma}\right)^2\right\} \tag{2.3}$$

这样

$$\Phi(l_1,l_2,\cdots,l_n;L) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{-n}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(l_i - L)^2\right\} \tag{2.4}$$

当已知 σ 时，利用这组观测数据对未知参数 L 做出估计，依据最大似然准则，应使

$$\Phi(l_1,l_2,\cdots,l_n;L) = \max$$

为便于计算，对上式取对数形式为

$$\ln\Phi = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(l_i - L)^2 = \max \tag{2.5}$$

根据对函数求极值的原理，L 的估值应由如下方程给出：

$$\frac{\partial\ln\Phi}{\partial L} = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}2(l_i - L) = 0$$

也就是

$$\sum_{i=1}^{n}(l_i - L) = 0$$

因此

$$\overline{L} = L = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{[l]}{n} \tag{2.6}$$

显然,(2.6)式与(2.1)式等价,即一组等精度观测数据的均值就是该估计量的数学期望

$$E(L) = \overline{L} = \frac{[l]}{n} \tag{2.7}$$

同时,由协方差传播律可得均值的方差为

$$D(\overline{L}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(l_i) = \frac{1}{n}m^2$$

$$m_{\overline{L}} = \frac{m}{\sqrt{n}} \tag{2.8}$$

可见,均值的中误差等于观测数据中误差的 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 倍。换句话说,增加观测次数,均值 $\overline{L}$ 的精度可以提高。但实际上,在 m 不变的情况下,如取 $m = 1$,依(2.8)式给出了 $m_{\overline{L}}$ 与观测次数 n 的关系曲线(图 2.1),从图中表明,n 增加,则 $m_{\overline{L}}$ 减小,即均值的精度可以提高,但当观测次数达到一定数目之后(比如 10 次)再增加观测次数,精度提高得却很慢了。所以,要提高均值的精度,不能简单从无限的增加观测次数来达到目的,而要从采用适当地观测方法、适当精度的仪器及适当的观测次数等几个方面入手。

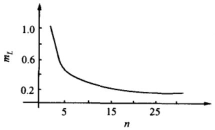


图 2.1

第二节　等精度观测数据的精度估计

在第一章第三节中讨论了精度估计的标准，其中用有限个观测值的真误差来求算观测值中误差的(1.19)式为

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$$

该式就是根据一组等精度真误差计算观测值中误差的基本公式。

例如，平面三角形三内角之和的真值应为180°，由三内角观测值算得的三角形闭合差，就是三内角之和的真误差，那么，用(1.19)式就有可能利用三角形闭合差算出观测值的中误差。

设等精度独立观测了各三角形之内角 α_i、β_i 与 $\gamma_i (i = 1,2,\cdots,n)$，由闭合差的定义，得

$$w_i = \sum{}_i - 180° \tag{2.9}$$

式中：$\sum_i$ 为各三角形的内角和。

根据计算中误差的基本公式，有

$$m_{\Sigma} = \pm \sqrt{\frac{[ww]}{n}} \tag{2.10}$$

而

$$\sum{}_i = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i$$

则

$$m_{\Sigma} = \sqrt{3}\, m$$

式中：m 为各观测角中误差，代入(2.10)式经整理，得

$$m = \pm \sqrt{\frac{[ww]}{3n}} \tag{2.11}$$

该式称为菲列罗公式。在三角测量中经常用它来初步评定测角的(内部)精度。

一般情况下,观测量的真值预先是无法知道的。因此,真误差也就不知道,这时就不能再利用(1.19)式计算方差或中误差的估值了。但由前面的叙述可知,观测量的均值是可得到的,它是估计量的数学期望。因此,可按

$$v_i = \overline{L} - l_i \tag{2.12}$$

计算观测值的改正数,其中 $i = 1, 2, \cdots, n$。

对于某一观测列来说,其均值愈接近真值,改正数就愈接近于真误差,但两者毕竟还是有差别的。下面将导出利用改正数 v_i 计算中误差的公式。

由真误差的定义式(1.14)和改正数的定义式(2.12),不难得

$$\Delta_i + v_i = \overline{L} - L = \Delta_{\overline{L}} \tag{2.13}$$

$$\Delta_i = \Delta_{\overline{L}} - v_i$$

对上式两边分别平方,取和再除以 n,得

$$\frac{[\Delta\Delta]}{n} = \frac{[\Delta_{\overline{L}}\Delta_{\overline{L}}]}{n} + \frac{[vv]}{n} - \frac{2\Delta_{\overline{L}}[v]}{n}$$

而

$$[v] = n\overline{L} - [l] = n\frac{[l]}{n} - [l] = 0 \tag{2.14}$$

那么

$$m^2 = m_{\overline{L}}^2 + \frac{[vv]}{n} \tag{2.15}$$

考虑 $m_{\overline{L}}^2 = \frac{m^2}{n}$ 并代入(2.15)式,经整理,得

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \tag{2.16}$$

该式称为白塞尔公式，它就是等精度观测值且只有一个未知数时，利用改正数计算观测数据精度的公式。将它代入(2.8)式，得利用改正数计算均值中误差的公式为

$$m_{\bar{L}} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} \tag{2.17}$$

需要指出的是，(2.16)式是以观测数据间误差是相互独立的正态分布为前提的，只有这时，这个观测数据精度估计的表达式才是确切的。

当一组观测数据之间具有相关性的情况下，观测数据的精度应按下式计算：

$$m_{\rho} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)(1-\rho)}} \tag{2.18}$$

式中：ρ 为观测值之间的相关系数。

显然，当 $\rho = 0$ 时，即观测数据之间误差是相互独立时，(2.18)式变为(2.16)式。换句话说，(2.18)式是(2.16)式的推广。

第三节　权及加权均值与其精度

以前讨论的都是等精度下的重复观测数据的处理。但在实际工作中，还常常遇到对某个物理量进行了 n 次观测，而这 n 次观测结果都具有不同的精度，这样一类所谓不等精度的观测问题。

例如，在具有一个结点的水准网中，待定点 P 的高程可由 S_1，S_2 及 S_3 3 条路线计算而得(图 2.2)。由于水准测量高差的中误差与水准路线的长度(平原地区)或测站数的多少(山区)有关，所以由 3 条路线求得 P 点的 3 个高程的中误差是不一样的。类似的这种情况在观测或实验中会经常遇到的。显然，对于这些非等精度的观测数据，不能简单地用取均值的方法求出待定量的估值；对于精度估计也是同样的，不能再使用等精度条件下的白塞尔公式了。

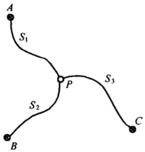


图 2.2

一般说来，设有 n 个观测数据 $l_1, l_2, \cdots, l_n$，各观测值分别具有不同的方根差 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$。

若按最大似然准则，应使

$$\Phi(l_1, l_2, \cdots, l_n; \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n; L) = \max \tag{2.19}$$

由于观测值具有正态性，则需使

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{l_i - L}{\sigma_i^2} = 0 \tag{2.20}$$

于是，L 的估值为

$$\hat{L} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} l_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{2.21}$$

为计算方便，不妨对上式的分子，分母同乘一个正常数 σ_0^2，对于$\frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$ 这样一个数值，用 p_i 来表示，即

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \tag{2.22}$$

因此

$$\overline{L} = \hat{L} = \frac{[pl]}{[p]} = \frac{p_1 l_1 + \cdots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \tag{2.23}$$

通常，称(2.22)式为权的定义式；(2.23)式为计算非等精度观测值加权均值的公式。

由权的定义式，不难写出各观测值的权之间的比例关系为

$$p_1 : p_2 : \cdots : p_n = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} : \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2} : \cdots : \frac{\sigma_0^2}{\sigma_n^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} : \frac{1}{\sigma_2^2} : \cdots : \frac{1}{\sigma_n^2} \tag{2.24}$$

可见，对于一组观测值来讲，其权之比等于相应方差的倒数比。这也表明，方差(或中误差)愈小，其权愈大；或者说，权愈大，精度愈高。

至此，可以说权是用来表示观测值方差之间比例关系的一个数字特征。换句

话讲,权是衡量观测值之间精度高低的一个相对数字指标。由于 σ_0 是任意选取的一个正常数,权的意义也就不在于它自身数值的大小,而重要的是它们之间所存在的比例关系。

在定权时,σ_0 起着一个比例常数的作用,如果取 $\sigma_0 = \sigma_i(1 \leqslant i \leqslant n)$,则第 i 个观测值的权 $p_i = 1$。这表明第 i 个观测值的权可充当“比重”单位,而

$$\sigma_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{p_i} = \sigma_0^2$$

可见,σ_0^2 相当于对应权为 1 时观测数据的方差,通常称等于 1 的权为单位权;与单位权相对应的观测数据称单位权观测值,它可以是一个实际的观测数据,也可以是一个设想的观测数据;单位权观测的方差(或中误差)称为单位权方差(或中误差)。

综上所述,对于一组不同精度的观测值定权时,σ_0 是可以任意选取的。选定了一个 σ_0 值,就有一组对应的权;不论 σ_0 选用何值,权之间的比例关系始终不变,使权为 1 的 σ_0 值就是单位权观测的中误差;同一问题中只能选定一个 σ_0 值,否则就破坏了权之间的比例关系。

由加权均值的公式(2.23)中,还可以看出,权是一个能够反映各观测值在估值中所占比重大小的量。

就普遍情况而言,(2.22)式中的方差 σ_i^2,它可以是相同观测元素的方差;广义地讲,也可以是不同观测元素的方差。以边、角为观测元素的平面网为例,观测值的权与中误差的基本关系式为

$$p_\beta = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_\beta^2} \quad , \quad p_S = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_S^2} \tag{2.25}$$

式中:σ_β 与 σ_S 分别为角度与边长观测的中误差;σ_0 是可以任意选取的比例常数。在同一问题中,对不同类的物理量应选用同一个 σ_0。可见,定权的实质是如何合理地估计观测的中误差。

此外,由(2.25)式可见,由于 σ_β 与 σ_S 的单位不同,权是有量纲的。例如在边角平面网中,如果认为角度观测的精度是相同的,而测边精度不等,此时可令

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sigma_\beta = \sigma_0 \\
&\text{于是} \\
&p_\beta = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_\beta^2} = 1 \qquad (\text{纯量}) \\
&p_{S_i} = \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_{S_i}^2} \quad [\mathrm{s}^2/(\mathrm{mm}\ \text{或}\ \mathrm{cm})^2]
\end{aligned}
\right\} \tag{2.26}
$$

也正因如此，边角网才有可能在 $[p_S \quad v_S \quad v_S] + [p_\beta \quad v_\beta \quad v_\beta] = \min$ 的准则下进行数据处理。

(2.26)式中的 σ_{S_i} 是观测边长中误差的估值，可根据大量的边长观测数据采用回归或相关分析的方法，求出测距仪的实验测距精度；也可以参考使用出厂时给定的仪器标称精度。至于角度观测的中误差估值，同样可以通过三角形闭合差、某等级仪器的测回数等，采用一定的数学模型（如菲利罗或广义菲利罗公式等）求出观测值中误差的估值。

下面讨论关于加权均值的精度问题，这里不妨将(2.23)式写成如下形式

$$
\overline{L} = \frac{[pl]}{[p]} = \frac{p_1}{[p]}l_1 + \frac{p_2}{[p]}l_2 + \cdots + \frac{p_n}{[p]}l_n
$$

根据协方差传播律，有

$$
\sigma_{\overline{L}}^2 = \left(\frac{p_1}{[p]}\right)^2\sigma_1^2 + \cdots + \left(\frac{p_n}{[p]}\right)^2\sigma_n^2 \tag{2.27}
$$

若令 $\sigma_0^2 = 1$，则 $\sigma_i^2 = \dfrac{1}{p_i}$。将其入上式，得

$$
\sigma_{\overline{L}}^2 = \frac{[p]}{[p]^2} = \frac{1}{[p]} \tag{2.28}
$$

可见，$p_{\overline{L}} = [p]$。那么，加权均值的方差等于各观测值权之和的倒数。

最后指出，由权的定义式，可得

$$\sigma_i = \frac{\sigma_0}{\sqrt{p_i}}$$

或

$$\sigma_i = \sigma_0 \sqrt{\frac{1}{p_i}} \tag{2.29}$$

也就是说,任一观测值的中误差 σ_i 等于单位权中误差与其权倒数平方根的乘积。

该式不仅适用于求任一观测值的中误差,而且也适用于计算观测值函数的中误差。此时,式中的权是指函数的权。

第四节　协因数及协因数传播律

在第一章第四节中,讨论了根据观测值的方差求函数的方差这类问题。由于权与方差成反比,当然也就可以用权来反映观测值函数的精度。这种由观测值的权来求函数权的一类问题称之为协因数传播律。在导出这种法则之前,尚需阐述协因数的有关概念。

一、协因数与协方差阵

设有观测值 l_i 和 l_j,它们的方差分别为 σ_i^2 和 σ_j^2,相互间的协方差为 σ_{ij} 。由权的定义,可得

$$\left.\begin{aligned} Q_{ii} &= \frac{1}{p_i} = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_0^2} \\ Q_{jj} &= \frac{1}{p_j} = \frac{\sigma_j^2}{\sigma_0^2} \\ Q_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0^2} \end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

或写为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_i^2 &= \sigma_0^2 Q_{ii} \\ \sigma_j^2 &= \sigma_0^2 Q_{jj} \\ \sigma_{ij} &= \sigma_0^2 Q_{ij}\end{aligned}\right\} \tag{2.31}$$

称 Q_{ii} 和 Q_{jj} 分别为 l_i 和 l_j 的协因数或权倒数，而称 Q_{ij} 为 l_i 关于 l_j 的互协因数或相关权倒数。σ_0^2 为单位权方差。

不难理解，Q_{ii} 和 Q_{jj} 与权 p_i 和 p_j 有着类似的作用，也可作为比较观测值精度高低的一种指标；而协因数 Q_{ij} 是反映观测值之间相关程度的一种指标。

如果把协因数的概念扩充，假定有观测值向量（或观测值函数向量）$\underset{n\times 1}{\boldsymbol{X}}$ 和 $\underset{r\times 1}{\boldsymbol{Y}}$，它们的方差阵分别为 $\underset{n\times n}{\boldsymbol{D}_{XX}}$、$\underset{r\times r}{\boldsymbol{D}_{YY}}$，$\boldsymbol{X}$ 关于 $\boldsymbol{Y}$ 的协方差阵为 $\underset{n\times r}{\boldsymbol{D}_{XY}}$，则相应地，有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{D}_{XX} &= \sigma_0^2 \boldsymbol{Q}_{XX} \\ \boldsymbol{D}_{YY} &= \sigma_0^2 \boldsymbol{Q}_{YY} \\ \boldsymbol{D}_{XY} &= \sigma_0^2 \boldsymbol{Q}_{XY}\end{aligned}\right\} \tag{2.32}$$

此时，称 $\boldsymbol{Q}_{XX}$ 和 $\boldsymbol{Q}_{YY}$ 分别为 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的协因数阵，而称 $\boldsymbol{Q}_{XY}$ 为 $\boldsymbol{X}$ 关于 $\boldsymbol{Y}$ 的互协因数阵。

若记

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y}\end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{Z}$ 的方差阵与协因数阵分别为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{D}_{ZZ} &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{XX} & \boldsymbol{D}_{XY} \\ \boldsymbol{D}_{YX} & \boldsymbol{D}_{YY}\end{bmatrix} \\ \boldsymbol{Q}_{ZZ} &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{XX} & \boldsymbol{Q}_{XY} \\ \boldsymbol{Q}_{YX} & \boldsymbol{Q}_{YY}\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

且有

$$\boldsymbol{D}_{ZZ} = \sigma_0^2 \boldsymbol{Q}_{ZZ} \tag{2.34}$$

与

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{D}_{YX} &= \boldsymbol{D}_{XY}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{Q}_{YX} &= \boldsymbol{Q}_{XY}^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\} \tag{2.35}$$

当 $\boldsymbol{Q}_{XY} = \boldsymbol{Q}_{XY}^{\mathrm{T}} = 0$ 时，说明 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 是相互独立的观测向量。至于 $\boldsymbol{X}$(或 $\boldsymbol{Y}$) 向量，可以是独立观测向量；也可以是相关观测向量。

当 $\boldsymbol{X}$(或 $\boldsymbol{Y}$)为独立观测向量时，有

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_{XX} = \begin{bmatrix} p_1 & & & 0 \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_n \end{bmatrix}$$

则由(2.32)式知，$\boldsymbol{X}$(或 $\boldsymbol{Y}$)的协因数阵为

$$\boldsymbol{Q}_{XX} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} & & & 0 \\ & \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{\sigma_n^2}{\sigma_0^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{p_n} \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

因此

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_{XX} &= \boldsymbol{Q}_{XX}^{-1} \\
\boldsymbol{P}_{XX}\boldsymbol{Q}_{XX} &= \boldsymbol{E}
\end{aligned}\right\} \tag{2.37}
$$

式中：$\boldsymbol{E}$ 为单位阵。通常称 $\boldsymbol{P}_{XX}$ 为观测向量 $\boldsymbol{X}$ 的权阵。

类似地，当 $\boldsymbol{X}$(或 $\boldsymbol{Y}$) 为相关观测向量时，则也有与(2.37)式同样的结论。但需要指出的是，$\boldsymbol{Q}_{XX}$ 表示的是一非对角阵。权阵 $\boldsymbol{P}_{XX}$ 的对角线元素不再是 x_i 的权了，也就是说，权阵 $\boldsymbol{P}_{XX}$ 的各个元素也不再有什么权的意义了。但是，在观测数据处理中，相关观测向量的权阵却起着权阵一样的作用。

二、协因数传播律

设有观测值的线性函数为

$$
\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{X} \tag{2.38}
$$

由协方差传播律，得

$$
\boldsymbol{D}_{ZZ} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{D}_{XX}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{2.39}
$$

式中：$\underset{n\times n}{\boldsymbol{D}_{XX}}$ 为观测值列向量 $\boldsymbol{X}$ 的方差阵。若令单位权方差为 σ_0^2，则协因数阵可由方差阵乘上常数 $\frac{1}{\sigma_0^2}$ 得到，即

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}_{XX} &= \frac{1}{\sigma_0^2}\boldsymbol{D}_{XX} \\
\boldsymbol{Q}_{ZZ} &= \frac{1}{\sigma_0^2}\boldsymbol{D}_{ZZ}
\end{aligned}\right\} \tag{2.40}
$$

将上式代入(2.39)式，得

$$
\sigma_0^2\boldsymbol{Q}_{ZZ} = \boldsymbol{F}(\sigma_0^2\boldsymbol{Q}_{XX})\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \sigma_0^2\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}_{XX}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}
$$

两边同除以 σ_0^2，则

$$Q_{ZZ} = FQ_{XX}F^{\mathrm{T}} \tag{2.41}$$

这就是观测值的协因数阵与其线性函数的协因数阵的关系式,通常称之为协因数传播律,或称之为权逆阵传播律。(2.41)式在形式上与协方差传播律(1.36)式相同,所以有时合称为广义传播律。

如果(2.38)式表示的是一非线性函数,那么应对函数取全微分将其化为线性函数的形式,然后再由协因数传播律求得函数的协因数阵。具体步骤与求非线性函数的协方差步骤相同,这里就不赘述了。

例[2.1]:设有观测值列向量 $\underset{n\times1}{X}$ 的两组线性函数 $\underset{r\times1}{U}$ 和 $\underset{t\times1}{V}$,已知协因数阵 Q_{XX},即

$$\left.\begin{aligned} U &= F_1X \\ V &= F_2X \end{aligned}\right\} \tag{2.42}$$

求 Q_{UV} 与 Q_{VU}。

解:将(2.42)式写成矩阵形式

$$Z = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} X$$

由协因数传播律,有

$$\begin{aligned} Q_{ZZ} &= \begin{bmatrix} Q_{UU} & Q_{UV} \\ Q_{VU} & Q_{VV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} Q_{XX} \begin{bmatrix} F_1^{\mathrm{T}} & F_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_1Q_{XX}F_1^{\mathrm{T}} & F_1Q_{XX}F_2^{\mathrm{T}} \\ F_2Q_{XX}F_1^{\mathrm{T}} & F_2Q_{XX}F_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.43}$$

所以

$$\left.\begin{aligned} Q_{UV} &= F_1Q_{XX}F_2^{\mathrm{T}} \\ Q_{VU} &= F_2Q_{XX}F_1^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\} \tag{2.44}$$

且有

$$Q_{UV} = Q_{VU}^{T} \tag{2.45}$$

例[2.2]:已知观测值列向量 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 的协因数阵 $Q_{X_1X_1}$ 和 $Q_{X_2X_2}$ 以及互协因数阵 $Q_{X_1X_2}$，或写为

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}, \quad Q_{XX} = \begin{bmatrix} Q_{X_1X_1} & Q_{X_1X_2} \\ Q_{X_2X_1} & Q_{X_2X_2} \end{bmatrix}$$

设有函数

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{U} &= \boldsymbol{F}_1\boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{V} &= \boldsymbol{F}_2\boldsymbol{X}_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.46}$$

求 $\boldsymbol{U}$ 关于 $\boldsymbol{V}$ 的协因数阵。

解:将(2.46)式写成

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{U} &= [\boldsymbol{F}_1 \quad \boldsymbol{0}]\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{V} &= [\boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{F}_2]\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{2.47}$$

由(2.44)式可得

$$Q_{UV} = [\boldsymbol{F}_1 \quad \boldsymbol{0}]\begin{bmatrix} Q_{X_1X_1} & Q_{X_1X_2} \\ Q_{X_2X_1} & Q_{X_2X_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{F}_2^{T} \end{bmatrix} = \boldsymbol{F}_1 Q_{X_1X_2}\boldsymbol{F}_2^{T} \tag{2.48}$$

不难有

$$
\boldsymbol{Q}_{VU} = \boldsymbol{F}_2\boldsymbol{Q}_{X_2X_1}\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q}_{UV}^{\mathrm{T}} \tag{2.49}
$$

当然，上述计算方法，也适用于相同函数形式的协方差计算。

第五节　非等精度观测数据的精度估计

在第一章第三节中，曾给出了利用一组等精度观测的真误差计算观测值中误差的基本公式，即

$$
m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}
$$

如果广义地理解，上式中的 Δ_i 可以是同一个量的真误差，也可以不是同一个量甚至是不同类观测量的真误差。如果令相互独立的等精度观测值为 l_i，其数学期望为 L_i，则真误差

$$
\Delta_i = l_i - L_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{2.50}
$$

现在的问题是，如何根据一组不等精度观测的真误差计算观测值的中误差？

如果设 l_i 为不等精度观测值，(2.50) 式表示的就是不等精度的真误差。为了能应用中误差的基本公式来计算单位权观测中误差，就需要得到一组等精度且其权为 1 的独立的真误差 Δ'_i。为此，令

$$
\Delta'_i = \alpha\Delta_i \tag{2.51}
$$

由权倒数传播律

$$
\frac{1}{p'_i} = \alpha^2\frac{1}{p_i} = 1 \tag{2.52}
$$

则

$$
\alpha = \sqrt{p_i}
$$

所以

$$\Delta'_i = \sqrt{p_i}\Delta_i \tag{2.53}$$

也就是说，利用(2.53)式可以将一组非等精度观测的真误差 Δ_i 转换成一组等精度观测且权为1的真误差 Δ'_i，不难理解，Δ'_i 也是一组独立的真误差。将(2.53)式代入中误差的基本公式(1.18)式及(1.19)式，得

$$\sigma_0 = \sqrt{E(\Delta'^2)} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{[\Delta'\Delta']}{n}} \tag{2.54}$$

与

$$m_0 = \hat{\sigma} = \pm\sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{n}} \tag{2.55}$$

上式就是根据一组不同精度的真误差计算单位权中误差的基本公式。

容易看出，当各观测值的权 $p_i = 1$ 时，(2.55)式变为(1.19)式。也可以说(1.19)式是(2.55)式的一种特殊情况。

在第二章第二节中还曾提到，观测量的真误差一般情况下是不知道的。但在观测与实验中，常常对一系列被观测量分别进行成对的观测。例如，水准测量中对各段进行往返观测，边角平面网中对边长对向观测，像点坐标的重复量测，宗地面积的二次量算以及测角中二次重合读数等等。这种成对的观测，称为双观测，对同一个量进行的二次观测称为一个观测对。

设对物理量 X_i 各观测二次，得观测值 l'_i 和 $l''_i(i = 1,2,\cdots,n)$。又假定各观测对的精度不同，设其权为 p_{d_i}，而同一观测对的两个观测值 l'_i 和 l''_i 的精度相同，设权为 p_i。

对于任何一个观测量来讲，不论其真值 X_i 的大小如何，总有

$$X_i - X_i = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{2.56}$$

即真值与其自身之差的真值为零。

由于观测不可避免地受到误差的影响，因此，各物理量的两个观测值之差一般为

$$l'_i - l''_i = d_i \neq 0 \tag{2.57}$$

那么,各差数的真误差为

$$\Delta_{d_i} = (l'_i - l''_i) - (X_i - X_i) = d_i - 0 = d_i \tag{2.58}$$

这表明,各观测对中两个观测值之差就是各差数的真误差。

对(2.58)式按权倒数传播律可得 d_i 的权倒数

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{p_{d_i}} &= \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i} = \frac{2}{p_i} \\ p_{d_i} &= \frac{p_i}{2} \end{aligned}\right\} \tag{2.59}$$

这样,由 n 个差数的真误差 Δ_{d_i} 及其相应的权 p_{d_i},求得单位权中误差为

$$m_0 = \sqrt{\frac{[p_d \Delta_d \Delta_d]}{n}}$$

顾及(2.58)及(2.59)两式,得

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pdd]}{2n}} \tag{2.60}$$

式中:$[pdd] = p_1(l'_1 - l''_1)^2 + p_2(l'_2 - l''_2)^2 + \cdots + p_n(l'_n - l''_n)^2$;$p_i$ 为 l'_i 或 l''_i 的权;n 是观测对的个数。

由权的定义(2.22)式可知

$$\sigma_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{p_i}$$

有了单位权中误差 $m_0(=\sigma_0)$,即可按上式求得各观测值的中误差,即

$$m_{l'} = m_{l''} = m_0 \sqrt{\frac{1}{p_i}}$$

而第 i 对观测值的均值 $\bar{L}_i = \frac{l'_i + l''_i}{2}$ 的中误差为

$$m_{\bar{L}_i} = \frac{m_{l'_i}}{\sqrt{2}} = m_0 \sqrt{\frac{1}{2p_i}} \tag{2.61}$$

如果所有的观测值 $l'_1, l'_2, \cdots, l'_n$ 和 $l''_1, l''_2, \cdots, l''_n$ 都是等精度的，可令其权 p_i 都等于 1，显然

$$m_l = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{2n}} \tag{2.62}$$

而每对观测值均值 $\bar{L}_i$ 的中误差为

$$m_{\bar{L}_i} = \frac{m_l}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[dd]}{n}} \tag{2.63}$$

顺便说明，当利用某个量的非等精度观测值的改正数计算单位权中误差时，可仿第二章第二节中的有关推导，这里直接给出：

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} \tag{2.64}$$

式中：

$$v_i = \bar{L} - l_i \tag{2.65}$$

其中：$\bar{L}$ 为被观测量的加权均值。

显然，(2.65)式表示的是同一个量的最或然值改正数。从适用范围上看，不同于(2.50)式表示的真误差取值范围。也就是说，(2.50)式不要求是同一个量的真误差，这是两者的区别。

例[2.3]：如图 2.3 所示一个结点的水准网，各已知数据和观测数据均列于表 2.1 中，计算结果列于表 2.2 中。

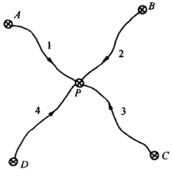


图 2.3

表 2.1

已知点	已知点高程 /m	路线	观测高差 /m	路线长度 /km
A	57.960	1	−9.201	45.6
B	40.460	2	+8.324	32.8
C	41.202	3	+7.556	40.3
D	57.060	4	−8.296	51.4

表 2.2

路线	P 点观测高程/m	定权 $p_1=\frac{100}{S}$	δl_i /mm	$p_i\delta l_i$	v_i /mm	p_iv_i	pvv	$pv\delta l$
1	48.759	2.19	+1	2.2	+9.2	+20.1	184.9	+20.1
2	48.784	3.03	+26	79.3	−15.8	−48.2	761.6	−1253
3	48.758	2.48	0	0	+10.2	+25.3	258.1	0
4	48.767	1.95	+9	17.6	+1.2	+2.3	2.8	+20.7
	$l_0=$ 48.758	$[p]=$ 9.67		$[p\delta l]=$ 99.1		$[pv]=$ −0.5	$[pvv]=$ +1207.4	$[pv\delta l]=$ −1212.4

$L=l_0+\delta l_0=48.7682(\text{m}),\ \delta l_0=\frac{[p\delta l]}{[p]}=10.2(\text{mm}),\ m_0=\pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}=\pm 20(\text{mm})$

由于定权时，选 $C=100$ 且路线长以 km 为单位，故上面求得的单位权中误差为 100km 观测高差的中误差。如要求每 km 观测高差的中误差，以备查是否符合观测规范的要求，则应

$$p_{\mathrm{km}} = \frac{100}{S} = \frac{100}{1} = 100$$

$$m_{\mathrm{km}} = m_0 \sqrt{\frac{1}{p_{\mathrm{km}}}} = m_0 \sqrt{Q_{\mathrm{km}}} = 20 \times \sqrt{0.01} = \pm 2(\mathrm{mm})$$

P 点高程的精度为

$$m_{\bar{L}} = \frac{m_0}{\sqrt{[p]}} = \frac{20}{\sqrt{9.67}} = \pm 6.5(\mathrm{mm})$$

最后再指出几点，在数据处理时，通常列入一些检核项，以防计算出现差错。诸如在上例中，使用了

1) $[pv] = 0$，其证明是

$$v_i = \bar{L} - l_i$$

对上式两边乘以 p_i，取和再考虑 $\bar{L} = \frac{[pl]}{[p]}$，即

$$[pv] = [p]\bar{L} - [pl] = [p]\frac{[pl]}{[p]} - [pl] = 0 \qquad (2.66)$$

至于算例中 $[pv] = -0.5$ 不完全等于 0，是由于计算中凑整误差所致。

2) $[pvv] = -[pv\delta l]$，证明如下：

$$v_i = \bar{L} - l_i = l_0 + \delta l_0 - l_i = \delta l_0 - (l_i - l_0) = \delta l_0 - \delta l_i$$

对上式两边同乘以 $p_i v_i$，取和再考虑 $[pv] = 0$，即

$$[pvv] = [pv]\delta l_0 - [pv\delta l] = -[pv\delta l] \qquad (2.67)$$

至于上例中，$[pvv] + [pv\delta l] = 1207.4 - 1212.4 = -5 \neq 0$，也是由于凑整误差所致。

在上面的算例中，还使用了 $\bar{L} = l_0 + \frac{[p\delta l]}{[p]}$ 来代替 $\bar{L} = \frac{[pl]}{[p]}$，这里留给读者

自己证明。从中可以看出，当利用手算进行数值计算时，对数值相近但绝对值又较大的数，常常是先将其通过一近似值转换成数值较小的数，然后再进行计算。

思考题与习题

1. 观测数据处理主要是为解决哪几个问题？

2. “只要观测或实验次数足够大、就可以使误差减小到任意小的程度”这话对吗？为什么。

3. 权与中误差有什么关系？有了中误差为什么还要引入权？

4. 在对非等精度观测处理时，为什么选用不同大小的单位权中误差，而计算所得的估值及其精度并不受其影响？

5. 为什么说观测对中两个观测值之差就是各差数的真误差？

6. 在前一章习题的第 7 题中，若使测角与测距仪器作到精度大致匹配，在观测纲要上应采取什么措施？

7. 若相关观测值 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$，其权阵 $\boldsymbol{P}_x=\begin{bmatrix}4&2\\2&3\end{bmatrix}$，单位权方差 $\sigma_0{}^2=1$，试证：$P_{x_1}=\dfrac{8}{3}$，$P_{x_2}=2$。

8. 已知 U、V 是观测值 $\boldsymbol{L}=(l_1\ \ l_2\ \ l_3)^{\mathrm{T}}$ 的函数，分别为 $\begin{cases}U=l_1+4l_2+3l_3\\V=7l_1-10l_2+16l_3\end{cases}$，且 $\boldsymbol{Q}_{LL}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&3&-2\\0&-2&4\end{bmatrix}$，求证随机变量 U 与 V 相互独立。

9. 设有向量 $\underset{3\times1}{\boldsymbol{Z}}=\begin{bmatrix}\underset{2\times1}{\boldsymbol{X}}\\\underset{1\times1}{\boldsymbol{Y}}\end{bmatrix}$，其中 $\underset{2\times1}{\boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$，已知权阵 $\boldsymbol{P}_Z=\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$，试求 $\boldsymbol{P}_x$，$\boldsymbol{P}_y$ 以及 $\boldsymbol{P}_{x_1}$，$\boldsymbol{P}_{x_2}$。

10. 甲、乙、丙三组在 A、B 两点之间测设水准，如图 2.4 所示。各路线观测高差为 h_a、h_b、h_c。其中：

甲路线单位权中误差为 ± 3 mm(以 2km 观测为单位权)；

乙路线单位权中误差为 ± 2 mm(以 1km 观测为单位权)；

丙路线单位权中误差为 ± 4 mm(以 4km 观测为单位权)。

求 A、B 之间高差的带权均值及三路线观测精度之比。

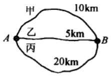


图 2.4

11. 如图 2.5 所示，A、B 两点的已知高程分别为 10.000m 和 12.000m，P 为待定点。A 至 P 点 3 km，B 至 P 点 6 km，测得高差 $h_{AP}=4.615\text{m}$，$h_{BP}=2.620\text{m}$，若每公里观测高差的精度

均为 $\sigma_0 = 2$ mm，求 P 点高程的带权均值及其精度 。



图 2.5

12．对某图形的面积用不同的器械测定三次，获得下列附有中误差的结果(单位为 cm^2)：

45.4 ± 0.30 ；45.1 ± 0.12 ；44.9 ± 0.18。

求该图形面积的带权均值及其精度。

13．若 n 个等精度观测值的权为 p，其算术均值的权为 P。则 p 与 P 的关系如何？

14．若边长为 d 的观测结果的权为 1，则边长为 D 的观测结果的权应该是多少？

15．设有函数 $F = f_1 x + f_2 y$，其中

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i \\ y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i l_i \end{cases}$$

式中：α_i, β_i 为系数，l_i 的权为 $p_i (i = 1,2,\cdots,n)$。试求函数 F 的协因数 Q_F。

第三章　参数估计的基本理论

第一节　观测数据处理常用的数学模型

在生产实际和科学研究中，经常要依据观测结果来揭示变量之间相互关系的数学规律，从而找出它们之间的定量表达式。这种对客观实践抽象概括的过程，就是指建立数学模型。一般说来，变量之间的关系大致可分为两类：一类是确定性的，即理论上的函数关系，表达这种关系的数学模型被称为理论方程；另一类是随机性的，即经验上的一种近似函数关系，表达这种关系的数学模型被称为经验方程。对于观测数据处理的问题，建立的数学模型多系后者。

为求得母体参数的估值，一般要通过这样三个步骤：一是选择数学模型，使其线性化；二是根据参数估计的某一准则，导出求解表达式；三是根据表达式最后解得参数估值及其方差。下面介绍的是数据处理时常用的几种数学模型。

1. 条件法

设有某观测问题，观测向量为 $\underset{n\times 1}{\boldsymbol{L}}$，或然改正数向量为 $\underset{n\times 1}{\boldsymbol{V}}$，则估值向量

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{V} \tag{3.1}$$

若考虑观测值之间应满足一定的几何或物理的某种约束，则数学模型可选为

$$F(\hat{\boldsymbol{L}}) = 0 \tag{3.2}$$

经线性化，得

$$F(\hat{\boldsymbol{L}}) = F(\boldsymbol{L}) + \left.\frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{L}}}\right|_{\hat{L}=L} \boldsymbol{V} = 0 \tag{3.3}$$

令

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{L}}}\right|_{\hat{L}=L} = \boldsymbol{A}, \qquad F(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{W} \tag{3.4}$$

则(3.2)式可写为

$$\boldsymbol{AV} + \boldsymbol{W} = 0 \tag{3.5}$$

称这种方法为条件法,(3.5)式被称作条件方程组。显然,它是以或然改正数为未知数向量的 $r(=n-t$,称多余观测或自由度)个方程组成的亚定型方程组。通常,其解是一个含有自由变量的解向量。只有在满足一定的准则下,方程组才有惟一的解向量。

2. 参数法

如果我们令观测向量的参数向量为 $\underset{t\times1}{\boldsymbol{X}}$,必存在

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^0 + \delta\boldsymbol{X} \tag{3.6}$$

式中:$\boldsymbol{X}^0$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的近似值向量;$\delta\boldsymbol{X}$ 为近似值的改正数向量。

由于待估参数是一组观测子样的函数,即 $\boldsymbol{X} = G(\hat{\boldsymbol{L}})$,可有

$$\hat{\boldsymbol{L}} = G^{-1}(\boldsymbol{X}) \tag{3.7}$$

令

$$F(\boldsymbol{X}) = G^{-1}(\boldsymbol{X})$$

则

$$F(\boldsymbol{X}) = \hat{\boldsymbol{L}} \tag{3.8}$$

如果将观测值的估值向量 $\hat{L}$ 表示成参数 X 如上那样的函数,经线性化后,得

$$F(\boldsymbol{X}) - \hat{\boldsymbol{L}} = F(\boldsymbol{X}^0) + \left.\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{X}}\right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^0}\delta\boldsymbol{X} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{V} = 0 \tag{3.9}$$

令

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{X}}\Big|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^0} &= \boldsymbol{B} \\
F(\boldsymbol{X}^0) - \boldsymbol{L} &= \boldsymbol{U}
\end{aligned}\right\} \tag{3.10}
$$

(3.9)式可以写为

$$
\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{U} \tag{3.11}
$$

则称这种方法为参数法,(3.11)式被称作观测(或误差)方程组。显然,它是以参数的近似值改正数为未知数向量的 n 个方程组成的超定型方程组。因此,它没有通常意义下的解向量。只有在满足一定的准则下,方程组才有惟一的解向量。

3. 附有未知数的条件法

如果我们选择如下的数学模型,即

$$
F(\hat{\boldsymbol{L}}, \boldsymbol{X}) = 0 \tag{3.12}
$$

经线性化后,得

$$
F(\hat{\boldsymbol{L}}, \boldsymbol{X}) = F(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{X}^0) + \frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{L}}}\Big|_{\hat{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{L}}\boldsymbol{V} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{X}}\Big|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^0}\delta\boldsymbol{X} = 0 \tag{3.13}
$$

令

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{L}}}\Big|_{\hat{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{A}, \quad \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{X}}\Big|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^0} = \boldsymbol{B} \\
&F(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{X}^0) = \boldsymbol{W}\boldsymbol{u}
\end{aligned}\right\} \tag{3.14}
$$

则(3.13)式可写为

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{u} = 0 \tag{3.15}
$$

不难理解,这是对条件法和参数法的一种组合。换句话说,它是这两种基本方法的概括。当 $\boldsymbol{B} = 0$ 或 $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{E}$($\boldsymbol{E}$ 为单位阵)的两种情况下,由(3.15)式即可导出条

件方程组(3.5) 式或误差方程组(3.11) 式。如果在(3.15) 式中,所选参数 $\delta\boldsymbol{X}$ 的个数为 t_1,且 $t_1 < t$(t 为必要观测数),那么该式是由$(n - t + t_1)$个方程组成的方程组。显然,(3.15) 式表示的是附有未知数的条件方程组。

4. 附有条件的参数法

对于(3.15) 式来讲,如果所选参数 $\delta\boldsymbol{X}$ 的个数$t < t_1 < n$ 时,若将(3.15)式中的系数和常项矩阵视为分块阵,并令

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_u \\ \boldsymbol{B}_w \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{W}u = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{W} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

则(3.15)式变为

$$\left.\begin{array}{l} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{V} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_u \\ \boldsymbol{B}_w \end{bmatrix} \delta\mathbf{X} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{W} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ \text{或} \begin{cases} \boldsymbol{V} = \boldsymbol{B}_u \delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{B}_w \delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{W} = \mathbf{0} \end{cases} \end{array}\right\} \tag{3.17}$$

可见,(3.17)式表示的是,所选参数之间不独立,而参数之间应满足$(t_1 - t)$个约束时,所谓附有条件的误差方程组。

以上介绍了条件法、参数法、附有未知数的条件法和附有条件的参数法等数学模型。其中,由组合法推导的(3.15)式具有通式的含义。如果所研究的数据处理问题更为复杂,只要适当地对(3.15)式中各项视为超矩阵,把其中的变量也看做是含有子矩阵的情况,就不难导出其应有的数学模型。由于这方面问题讨论,已超出本课程内容范围,在此就不详细谈及了。

至于对各种数学模型的最后选择使用,一是要根据实际的问题,例如已知数据的多少或系统的配置状态等等;二是要根据计算工具和计算者的技术水平等。

第二节　条件观测处理

一、原　　理

由第一章中的内容可知,在观测工作中,为了及时发现错误和提高观测结果的

精度,常做多余观测。例如,为确定一个平面三角形的形状,只要观测其中的任意两个内角就够了,对这两个角的观测,称为必要观测。相对于必要观测而言,对第三个内角的观测,就称为多余观测。由于有多余观测的存在,则三内角观测值的估值 $\hat{L}_i(i = 1,2,3)$ 之间应满足几何约束

$$\sum_{i=1}^{3} \hat{L}_i = 180^\circ \tag{3.18}$$

$\hat{L}_i$ 之间应满足的几何或物理的约束关系称为条件,表达这种关系的方程就称为条件方程[如(3.18)式]。

由于观测值 l_i 带有随机误差,若设观测值的改正数为 v_i,则

$$\hat{L}_i = l_i + v_i \tag{3.19}$$

将上式代入(3.18)式中,得

$$\sum_{i=1}^{3} v_i + w = 0 \tag{3.20}$$

式中:

$$w = \sum_{i=1}^{3} l_i - 180^\circ \tag{3.21}$$

这样,就把求估值 $\hat{L}_i$ 的问题化成如何求一组改正数 v_i 的问题了。要从(3.20)式的一个方程中来确定三个改正数 v,显然其解不是惟一的。根据最小二乘准则的要求,要从众多组解中寻求其中能使$[pvv]$ = min 的那一组 v 值。从数学上讲,这是一个求条件极值的问题。

一般地,设有某观测问题,观测值为 $\underset{n\times 1}{\boldsymbol{L}}$,其相应的权阵为 $\underset{n\times n}{\boldsymbol{P}}$,改正数为 $\underset{n\times 1}{\boldsymbol{V}}$,估值为 $\underset{n\times 1}{\hat{\boldsymbol{L}}}$。当有 r 个多余观测时,由于每一个多余观测就反映一个条件。因此,条件的个数与多余观测的个数相同。这里,假定全部条件均为线性形式,则有

$$
\left.\begin{aligned}
a_1 \hat{L}_1 + a_2 \hat{L}_2 + \cdots + a_n \hat{L}_n + a_0 = 0 \\
b_1 \hat{L}_1 + b_2 \hat{L}_2 + \cdots + b_n \hat{L}_n + b_0 = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
r_1 \hat{L}_1 + r_2 \hat{L}_2 + \cdots + r_n \hat{L}_n + r_0 = 0
\end{aligned}\right\} \tag{3.22}
$$

式中：$a_i, b_i, \cdots, r_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 为各估值条件式的系数；$a_0, b_0, \cdots, r_0$ 为条件式中的常数项。

以 $\hat{L}_i = l_i + v_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 代入(3.22)式，得

$$
\left.\begin{aligned}
av_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n + w_a = 0 \\
b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n + w_b = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_n v_n + w_r = 0
\end{aligned}\right\} \tag{3.23}
$$

式中：$w_i (i = a, b, \cdots, r)$ 为条件方程的闭合差，或称条件方程的不符值(自由项)：

$$
\left.\begin{aligned}
w_a = a_1 l_1 + a_2 l_2 + \cdots + a_n l_n + a_0 \\
w_b = b_1 l_1 + b_2 l_2 + \cdots + b_n l_n + b_0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
w_r = r_1 l_1 + r_2 l_2 + \cdots + r_n l_n + r_0
\end{aligned}\right\} \tag{3.24}
$$

若以向量-矩阵来表示，令

$$\underset{r\times n}{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{bmatrix}, \quad \underset{n\times 1}{\hat{\boldsymbol{L}}} = \begin{bmatrix} \hat{L}_1 \\ \hat{L}_2 \\ \vdots \\ \hat{L}_n \end{bmatrix}$$

$$\underset{n\times 1}{\boldsymbol{L}} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}, \quad \underset{n\times 1}{\boldsymbol{V}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\underset{r\times 1}{\boldsymbol{A}_0} = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ \vdots \\ r_0 \end{bmatrix}, \quad \underset{r\times 1}{\boldsymbol{W}} = \begin{bmatrix} w_a \\ w_b \\ \vdots \\ w_r \end{bmatrix}$$

则(3.22)式～(3.24)式的矩阵表达式为

$$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{0} \tag{3.25}$$

$$\boldsymbol{AV} + \boldsymbol{W} = \boldsymbol{0} \tag{3.26}$$

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{AL} + \boldsymbol{A}_0 \tag{3.27}$$

按前面的叙述,可用拉格朗日乘数法对(3.26)式求解。为此,设

$$\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} = (k_a, k_b, \cdots, k_r)$$

称其为联系数向量,它的维数与条件式个数 r 相等。按拉氏乘数法求条件极值时,要组成新函数

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V} - 2\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{W}) \tag{3.28}$$

使 $\boldsymbol{\Phi}$ 对 $\boldsymbol{V}$ 求一阶导数,并令其为零,即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}\boldsymbol{V}} = 2\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} - 2\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$$

解上式,得

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K} \tag{3.29}$$

称为改正数方程,其纯量形式为

$$v_i = \frac{1}{p_i}(a_ik_a + b_ik_b + \cdots + r_ik_r) \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

将(3.29)式代入(3.26)式,得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{W} = \boldsymbol{0} \tag{3.30}$$

令

$$\underset{r\times r}{\boldsymbol{N}} = \underset{r\times n}{\boldsymbol{A}}\,\underset{n\times n}{\boldsymbol{P}^{-1}}\,\underset{n\times r}{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}} \tag{3.31}$$

则有

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{W} = \boldsymbol{0} \tag{3.32}$$

称为联系数法方程,简称法方程(数学上也称正则方程)。它是一个未知数的个数与方程个数相等的正则方程。也就是说,矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的秩 $r_{\boldsymbol{N}} = r$。因此,$\boldsymbol{K}$ 有惟一的解向量。

不难证明,$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}$。$\boldsymbol{N}$ 在这里是 r 阶对称方阵。因此,法方程的纯量形式为

$$\left.\begin{aligned}
\left[\frac{aa}{p}\right]k_a + \left[\frac{ab}{p}\right]k_b + \cdots + \left[\frac{ar}{p}\right]k_r + w_a = 0 \\
\left[\frac{ab}{p}\right]k_a + \left[\frac{bb}{p}\right]k_b + \cdots + \left[\frac{br}{p}\right]k_r + w_b = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left[\frac{ar}{p}\right]k_a + \left[\frac{br}{p}\right]k_b + \cdots + \left[\frac{rr}{p}\right]k_r + w_r = 0
\end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

由上面的对称线性方程组中可解出联系数 $\boldsymbol{K}$，将其代入改正数方程(3.29)式，可求出改正数 $\boldsymbol{V}$，进而再求出估值$\hat{\boldsymbol{L}}$。

二、条件个数与条件方程

前已述及，条件个数与多余观测的个数相同。如果观测数据的个数为 n，独立的待估参数的个数为 t，一般地，条件的个数为

$$r = n - t \tag{3.34}$$

但在观测问题中，有时，条件总数除与观测数有关外，还与多余的起算数据有关。

若以测量控制网为例，为了计算待定点的直角坐标，任何控制网都必须要有一定数量的起算数据及足够数量的观测数据。三角网的必要起算数据有 4 个，即两个点的纵横坐标(或一个点的纵横坐标，一条边长，一条边的方位角)；测边网、边角网或导线网的必要起算数据有 3 个，即一个点的纵横坐标和一条边的方位角；水准网的必要起算数据有 1 个，即一个点的已知高程。只有这样，测量控制网才既不能平移，也不能旋转和伸缩。

凡是具有一套必要起算数据的控制网，称其为独立网；凡是有多余起算数据的控制网，称为非独立网或附合网。

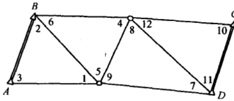


图 3.1

如图 3.1 所示平面控制网,观测了网中全部角度(即观测数为 12),如果仅 A、B 两点为已知点,则待定点数为 4,待估参数(必要观测数)为 8,若按(3.34)式计算,有

$$r = n - t = 12 - 8 = 4$$

如果除 A、B 外,C、D 也为已知点,则该网是一个具有多余起算数据的非独立网。此时,应按下式计算条件个数,即

$$r' = n' - t - 2q \tag{3.35}$$

式中:$n' = n + n_s + n_\alpha$,n_s 为多余的起算边长及加测边长总数;n_α 为多余的起算方位角及加测方位角总数;q 为多余的起算点或已知点组个数。

对图 3.1 所示非独立网,其中 $n = 12, n_s = 1, n_\alpha = 1, q = 1, t = 4$。代入(3.35)式,得 $r' = 8$。

值得强调的是,任何观测问题,当采用条件观测处理时,条件数目的确定是很重要的。当条件个数大于 1 时,各条件之间还应保持相互间是独立的。也就是(3.22)式表述的 r 个条件方程

$$F_i(\hat{L}_1, \hat{L}_2, \cdots, \hat{L}_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

中,任何一个方程都不能由其他方程的线性组合表出。否则,实际问题中的几何或物理的约束将得不到充分而完整的反映。

下面再来介绍条件方程式的种类,这里仍以平面网为例。根据条件法数学模型 $\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{L}}) = \boldsymbol{0}$ 的特点,三角网的条件式可分为两类:一类是角度条件,一类是正弦条件。

所谓角度条件是指方程式的左边除闭合差外,全部是由系数为 ±1 或 0 的角度改正数组成的条件。常有以下 3 种条件:

1) 图形条件,是指 n 边形的内角估值之和应满足$(n - 2).180°$的条件。具体表达式是

$$\sum v_i + w_{图} = 0 \tag{3.36}$$

式中:

$$w_{图} = \sum \beta_i - (n - 2) \cdot 180°$$

其中：$\sum \beta_i$ 为各内角观测值之和。

2）水平闭合条件。若在控制点上观测了按相邻两方向组成的全部角落，亦即在网里面的控制点上，才产生水平闭合条件。具体表达式是

$$\sum v_i + w_{水} = 0 \tag{3.37}$$

根据观测纲要可知，当按角度为观测元素列立条件式时，$w_{水} = 0$；若以方向为观测元素时，则该条件式不存在。

3）方位角（或固定角）条件。如果网中有两个或两个以上的起算方位角，此时产生方位角（或固定角）条件。如图 3.1 所示，有方位角条件

$$\sum (\pm v_{c_i}) + w_\alpha = 0 \tag{3.38}$$

式中：

$$w_\alpha = \alpha_{AB} - c_2 + c_5 - c_8 + c_{11} - \alpha_{CD}$$

其中：c_i 角为间隔角观测值。在推算路线之左取“+”号；在推算路线之右取“-”号。

所谓正弦条件是指（3.2）式左边全是用正弦（或余弦）函数表示的非线性条件。为了能应用最小二乘准则对参数做出估计，需要把非线性函数按泰勒公式展开成线性形式。正弦条件包括基线（固定边）条件、极条件及纵横坐标条件。

1）基线（固定边）条件，是指三角网中有两条或两条以上的起算边时应产生的条件。如图 3.2 所示三角网，若以虚线表示的为“推算路线”，则基线条件式为

$$S_{CD} = S_{AB} \frac{\prod_{i=1}^{4} \sin \hat{a}_i}{\prod_{i=1}^{4} \sin \hat{b}_i}$$

取对数，按泰勒公式展开，取至一次项，得

$$\sum \delta_a v_a - \sum \delta_b v_b + w_S = 0 \tag{3.39}$$

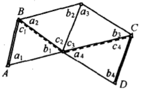


图 3.2

式中：

$$w_S = \lg S_{AB} + \sum \lg\sin a - \sum \lg\sin b - \lg S_{CD}$$

其中：S_{AB}、S_{CD} 为两已知边长；a_i，b_i 为观测角；δ_i，w_s 均以对数第六位为单位；δ_i 为 i 角的正弦对数秒差。

如果注意到 $\delta_i = \frac{\mu}{\rho''}\cot i$，$\mu$ 取 0.434 29，将其代入(3.39)式，则得相应的真数形式的基线条件方程式

$$\sum \cot a \cdot v_a - \sum \cot b \cdot v_b + w_S' = 0 \tag{3.40}$$

式中：

$$w'_S = \rho'' \frac{S'_{CD} - S_{CD}}{S'_{CD}}$$

其中：S'_{CD} 是由观测值推算得到的边长。

2）极条件，是指在闭合图形中，经过不同的三角形（推算路线）推算的同一条边长应具有相同的长度。产生极条件的图形有中点多边形，大地四边形及扇形。

由于极条件是用来保证几何图形完全闭合的，因此也可认为它是基线条件的一种特殊情况，也就不难有极条件的对数形式为

$$\sum \delta_a v_a - \sum \delta_b v_b + w_{极} = 0 \tag{3.41}$$

式中：

$$w_{极} = \sum \lg\sin a - \sum \lg\sin b$$

其真数形式为

$$\sum \cot a \cdot v_a - \sum \cot b \cdot v_b + w'_{极} = 0 \tag{3.42}$$

式中：

$$w'_{极} = \left(1 - \frac{\Pi\sin b}{\Pi\sin a}\right)\rho''$$

3）纵、横坐标条件，是指在控制网中，当存在有被隔开的已知点或已知点组（由固定边连接的几个已知点）时，则产生坐标条件。

所谓坐标条件就是，由一个已知点或已知点组开始，通过网中推算路线上的各角度估值可以求出另一个被隔开的已知点或已知点组的坐标。那么，纵、横坐标的推算值应等于该点的已知坐标值。其具体表达式形式及推导过程将在下一节中给出。

单位权中误差可通过观测值的改正数 $\boldsymbol{V}$，按下列计算

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}}{r}} \tag{3.43}$$

式中：r 为多余观测数。

第三节　附有未知数的条件观测处理

一、原　　理

在第三章第一节中讨论过，当对某观测问题选择的数学模型为 $F(\hat{\boldsymbol{L}}, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{0}$ 时，经线性化后，得(3.15)式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{W}u = \boldsymbol{0}$$

这里，若假定观测数为 n，所选未知数的个数为 t_1 且 $t_1 < t$（必要观测数）。那么，该式是由

$$(n - t + t_1) = (r + t_1)$$

个方程组成的方程组。也就是说，附有未知数的条件观测问题，除了观测值的估值应满足 r 个几何或物理的约束之外，每选定一个未知数就要增加一个条件式。

由于附有未知数的条件方程是常规条件式的扩展形式，若对(3.15)式求改正数 $\boldsymbol{V}$，也应按求条件极值的方法组成函数

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V} - 2\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{W}u) \tag{3.44}$$

为使函数 $\boldsymbol{\Phi}$ 为最小，必须使它对自变量 $\boldsymbol{V}$ 和 $\delta\boldsymbol{X}$ 的偏导数等于零，即

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{V}} &= 2\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} - 2\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \delta \boldsymbol{X}} &= -2\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}\end{aligned}\right\}$$

或写为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{V} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K} \\ &\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K} = \boldsymbol{0}\end{aligned}\right\} \tag{3.45}$$

将(3.45)式中的第一式代入(3.15)式中，有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{W}u = \boldsymbol{0}$$

若记

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

则有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{N}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{W}u &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K} &= \boldsymbol{0}\end{aligned}\right\} \tag{3.46}$$

或写成

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{N} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} \\ \delta\boldsymbol{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}u \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{3.47}$$

称(3.46)式与(3.47)式为附有未知数的条件观测的法方程组。不难看出，其系数矩阵为对称阵，解此方程组即可求得 $\boldsymbol{K}$ 和 $\delta\boldsymbol{X}$，然后再由(3.45)式中的第一式求出改正数 $\boldsymbol{V}$。

单位权中误差的计算，仍按下式

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}}PV}{r}}$$

二、附有未知数的坐标条件方程

为不失一般性，不妨仍以平面控制网为例。由于某些控制网网形的复杂，或由于基准位置的随意以及转化计算等，常常需要选择网中的某些元素（如角度、某边的边长、方位或某点的坐标）的近似值改正数作为未知数，使得网形结构及整个条件式的列立趋于简单化。如图 3.3 所示的线形网（已知点互不相邻），其坐标条件式显然不易列出。如果选择以某个已知点（如 A）为端点的边长及该边的方位角的近似值改正数 δS 与 $\delta\alpha$ 作为未知数，则该网的条件式就不难列出了。

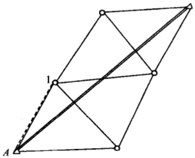


图 3.3

又如图 3.4 所示的线形网，该网条件总数为 14，其中有图形条件 10 个，极条件与圆周（水平）条件各 1 个，另外两个附合条件的列立就比较困难。如果选取 A—5 边的边长及其方位角的近似值 S_{A5}^0与 α_{A5}^0的改正数 δS 与 $\delta\alpha$ 作为未知数，容易看出，利用点 5 的坐标估值和已知点 A 的坐标，按 5—A—6—8—C 路线可以推算出 C 点的坐标。应有条件式

$$\left.\begin{aligned} X_A + \Delta X_{A6} + \Delta X_{68} + \Delta X_{8C} - X_C = 0 \\ Y_A + \Delta Y_{A6} + \Delta Y_{68} + \Delta Y_{8C} - Y_C = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.48}$$

式中：ΔX_{ij}、ΔY_{ij}表示 i 点到 j 点坐标增量的估值。

根据坐标增量公式，有

$$\left.\begin{aligned}
\Delta X_{A6} &= S_{A6}\cos\alpha_{A6} = S_{A5}\frac{\sin A_7}{\sin B_7}\cos(\alpha_{A5}+C_7)\\
\Delta X_{68} &= S_{A5}\frac{\sin A_7\sin A_8\sin A_9}{\sin B_7\sin B_8\sin B_9}\cos(\alpha_{A5}+C_7-C_8-C_9+180^\circ)\\
\Delta X_{8C} &= S_{A5}\frac{\sin A_7\sin A_8\sin A_9\sin A_{10}}{\sin B_7\sin B_8\sin B_9\sin B_{10}}\cos(\alpha_{A5}+C_7-C_8-C_9+C_{10})
\end{aligned}\right\}
\tag{3.49}$$

同理,可得 ΔY_{ij} 如上形式的表达式(只要将上式中的 cos 改成 sin),此略。

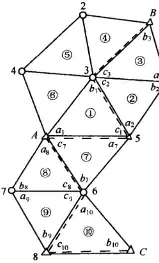


图 3.4

将(3.49)式代入(3.48)式的一式中,按泰勒公式展开,取至一次项并考虑

$$A_i = a_i + v_{a_i}, \qquad B_i = b_i + v_{b_i}, \qquad C_i = c_i + v_{c_i}$$

则有

$$\sum\left\{(\frac{\partial\Phi_X}{\partial A_i})_0 v_{a_i} + (\frac{\partial\Phi_X}{\partial B_i})_0 v_{b_i} + (\frac{\partial\Phi_X}{\partial C_i})_0 v_{c_i}\right\}\frac{1}{\rho} + (\frac{\partial\Phi_X}{\partial S_{A5}})_0\delta S +$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_X}{\partial \alpha_{A5}}\right)_0 \delta\alpha \frac{1}{\rho} + w_x = 0 \tag{3.50}$$

式中：

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_x &= X_A + \Delta X_{A6} + \Delta X_{68} + \Delta X_{8c} - X_c \\
w_x &= X_c^0 - X_c \\
X_c^0 &= X_A + \Delta X_{A6}^0 + \Delta X_{68}^0 + \Delta X_{8c}^0
\end{aligned}\right\} \tag{3.51}$$

其中：ΔX_{ij}^0 是根据观测值a_i、b_i、c_i 和近似值S_{A5}^0 及 α_{A5}^0 求得的近似坐标增量。函数对 A_i 求偏导数，得

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \Phi_X}{\partial A_7}\right)_0 &= \Delta X_{A6}^0 \cot a_7 + \Delta X_{68}^0 \cot a_7 + \Delta X_{8C}^0 \cot a_7 = \Delta X_{AC}^0 \cot a_7 \\
\left(\frac{\partial \Phi_X}{\partial A_8}\right)_0 &= \Delta X_{68}^0 \cot a_8 + \Delta X_{8C}^0 \cot a_8 = \Delta X_{6C}^0 \cot a_8 \\
\left(\frac{\partial \Phi_X}{\partial A_9}\right)_0 &= \Delta X_{68}^0 \cot a_9 + \Delta X_{8C}^0 \cot a_9 = \Delta X_{6C}^0 \cot a_9 \\
\left(\frac{\partial \Phi_X}{\partial A_{10}}\right)_0 &= \Delta X_{8C}^0 \cot a_{10}
\end{aligned}\right\} \tag{3.52}$$

函数对 B_i 及 C_i 求偏导数，得

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \Phi_X}{\partial B_7}\right)_0 = -\Delta X_{AC}^0 \cot b_7, \quad \left(\frac{\partial \Phi_X}{\partial C_7}\right)_0 = -\Delta Y_{AC}^0(+1) \\
&\left(\frac{\partial \Phi_X}{\partial B_8}\right)_0 = -\Delta X_{6C}^0 \cot b_8, \quad \left(\frac{\partial \Phi_X}{\partial C_8}\right)_0 = \left(\frac{\partial \Phi_X}{\partial C_9}\right)_0 = -\Delta Y_{6C}^0(-1) \\
&\left(\frac{\partial \Phi_X}{\partial B_9}\right)_0 = -\Delta X_{6C}^0 \cot b_9, \quad \left(\frac{\partial \Phi_X}{\partial C_{10}}\right)_0 = -\Delta Y_{8C}^0(+1) \\
&\left(\frac{\partial \Phi_X}{\partial B_{10}}\right)_0 = -\Delta X_{8C}^0 \cot b_{10}
\end{aligned}\right\} \tag{3.53}$$

仿上,不难求出函数对 S_{A5} 及 α_{A5} 的偏导数,得

$$\left.\begin{aligned}(\frac{\partial \Phi_X}{\partial S_{A5}})_0 &= \frac{1}{S_{A5}^0}(\Delta X_{A6}^0 + \Delta X_{68}^0 + \Delta X_{8C}^0) = \frac{\Delta X_{AC}^0}{S_{A5}^0} \\ (\frac{\partial \Phi_X}{\partial \alpha_{A5}})_0 &= -\frac{1}{\rho}(\Delta Y_{A6}^0 + \Delta Y_{68}^0 + \Delta Y_{8C}^0) = \frac{-\Delta Y_{AC}^0}{\rho}\end{aligned}\right\} \tag{3.54}$$

将(3.52)、(3.53)、(3.54)诸式代入(3.50)式中,并两边同乘以 ρ'',即得经线性化后真数形式的附有未知数的纵坐标条件方程,即

$$\begin{aligned}&\sum_{i=7}^{10}\Delta X_{ic}^0(\cot a_i v_{a_i} - \cot b_i v_{b_i}) - \sum_{i=7}^{10}\Delta Y_{ic}^0(\pm v_{c_i}) \\ &+ \frac{\rho \Delta X_{AC}^0}{S_{A5}^0}\delta S - \Delta Y_{AC}^0 \delta\alpha + \rho w_x = 0\end{aligned} \tag{3.55}$$

同理,可以导出相应的附有未知数的横坐标条件方程,即

$$\begin{aligned}&\sum_{i=7}^{10}\Delta Y_{ic}^0(\cot a_i v_{a_i} - \cot b_i v_{b_i}) + \sum_{i=7}^{10}\Delta X_{ic}^0(\pm v_{c_i}) \\ &+ \frac{\rho \Delta Y_{AC}^0}{S_{A5}^0}\delta S + \Delta X_{AC}^0 \delta\alpha + \rho w_y = 0\end{aligned} \tag{3.56}$$

式中:

$$\left.\begin{aligned}w_y &= Y_C^0 - Y_C \\ Y_C^0 &= Y_A + \Delta Y_{A6}^0 + \Delta Y_{68}^0 + \Delta Y_{8C}^0\end{aligned}\right\} \tag{3.57}$$

其中:ΔY_{ij}^0 是根据观测值 a_i、b_i、c_i 和近似值 S_{A5}^0 及 α_{A5}^0 求得的近似坐标增量。

类似地,也可导出路线 A—5—3—B 上的坐标条件,其形式上与(3.55)、(3.56)两式雷同。

不难理解,如果将(3.55)、(3.56)两式中有关未知数 δS 与 $\delta\alpha$ 的项去掉,即令 $\delta S = \delta\alpha = 0$,则剩余项构成的方程即为上一节留待讨论的一般形式的坐标条件方程式。

顺便指出，计算时为避免条件式系数过大，通常坐标增量以 km 为单位，而 w_x 与 w_y 以 m 为单位。此时，公式中的 ρ 取 206.265。至于 v_{c_i} 前面的正负号取决于 C_i 所处位置，如果在推算路线之左取“+”号；在推算路线之右取“-”号。如果有几个三角形连续出现在推算路线的同一侧，则它们的间隔 C 角有公共顶点，相应的几个系数在组成条件式时也要重复使用几次。如图 3.4 中，6 号点处⑧与⑨两个三角形同位于推算路线之右侧。因此，在(3.55)式中第三项中的 v_{c_8} 及 v_{c_9} 的系数应同是 6 点到 C 点的横坐标增量；同理，在(3.56)式中的相应处也同是 6 点到 C 点的纵坐标增量。

第四节　间接观测处理

一、原　　理

由第三章第一节中的讨论可知，如果对某观测问题选择的数学模型为 $\hat{\boldsymbol{L}} = F(\boldsymbol{X})$，经线性化后，得(3.11)式

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B}\,\delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{U}$$

该式就是间接观测的误差方程组。由数学模型可以看出，间接观测的处理，首先是要选定足以确定某观测问题的 t 个未知参数，将每个观测值估值用所选定的未知数的函数表示出。可见，未知数个数的确定是很重要的。间接观测中未知数的个数等于必要观测数。显然，观测个数 n 应满足$n > t$。至于未知数的选择可根据具体情况和便于计算的原则，可以选择观测量或非观测量，也可二者兼而有之。

我们仍以第三章第二节中开头叙述的平面单三角形为例。若按间接观测处理，首先要确定必要观测的个数，前已述及，为确定一个平面三角形的位置，只要观测其中的任意两个角度就够了。因此，必要观测数 $t = 2$。不妨就选择 X_1、X_2 为观测值估值 $\hat{L}_1$、$\hat{L}_2$ 的未知数。然后，可以列出 3 个用未知数表达观测值估值的方程，有

$$\begin{cases} \hat{L}_1 = X_1 \\ \hat{L}_2 = X_2 \\ \hat{L}_3 = 180^\circ - X_1 - X_2 \end{cases} \tag{3.58}$$

令

$$
\begin{cases} \hat{L}_i = l_i + v_i & i = 1,2,3 \\ X_j = x_j^0 + \delta x_j & j = 1,2 \\ x_j^0 = l_j \end{cases} \tag{3.59}
$$

式中：l 为观测值；x_j^0 为未知数的近似值；δx_j 为未知数改正数。

将上式代入(3.58)式中，写成矩阵形式，有

$$
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \cdot \tag{3.60}
$$

式中：$w = 180° - \sum_{i=1}^{3} l_i$。

有了误差方程组(3.11)式之后，为了对这种超定型方程组求出惟一的解向量，根据最小二乘准则，(3.11)式中的未知数 $\underset{t\times1}{\delta\boldsymbol{X}}$ 必须能使观测值改正数 $\boldsymbol{V}$ 满足 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PV} = \min$。令 $\underset{n\times n}{\boldsymbol{P}}$ 是观测值 $\underset{n\times1}{\boldsymbol{L}}$ 的权阵，则按数学上求函数自由极值的理论，就是要使

$$
\frac{\partial \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PV}}{\partial \delta\boldsymbol{X}} = 2\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \delta\boldsymbol{X}} = 2\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PB} = \boldsymbol{0} \tag{3.61}
$$

也就是

$$
\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PV} = \boldsymbol{0} \tag{3.62}
$$

将(3.11)式代入上式，有

$$
\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PB}\delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PU} = \boldsymbol{0} \tag{3.63}
$$

令

$$\underset{t\times t}{\boldsymbol{N}} = \underset{t\times n}{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\underset{n\times n}{\boldsymbol{P}}\underset{n\times t}{\boldsymbol{B}} \tag{3.64}$$

则

$$\boldsymbol{N}\delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0} \tag{3.65}$$

(3.63)式及(3.65)式就是用以解算未知数 $\delta\boldsymbol{X}$ 的方程组，称其为法方程组。将求得的 $\delta\boldsymbol{X}$ 代入(3.11)式可以求得观测值的改正数 $\boldsymbol{V}$，进而得观测值的估值为

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{V}$$

各未知数的估值为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^0 + \delta\boldsymbol{X}$$

为了区别条件方程组的系数阵 $\boldsymbol{A}$，误差方程组的系数阵 $\boldsymbol{B}$ 中的各元素为

$$\boldsymbol{B} = \frac{\partial F}{\partial\delta\boldsymbol{X}}\bigg|_{x=x^0} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & t_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_n & \cdots & t_n \end{bmatrix}$$

相应地，误差方程组中的常数项向量为

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & t_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_n & \cdots & t_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_t^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$$

式中：$\boldsymbol{X}^0$ 为未知数的近似值向量。

法方程组(3.65)式的纯量形式为

$$\begin{cases}[paa]\delta x_1 + [pab]\delta x_2 + \cdots + [pat]\delta x_t + [pau] = 0 \\ [pab]\delta x_1 + [pbb]\delta x_2 + \cdots + [pbt]\delta x_t + [pbu] = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ [pat]\delta x_1 + [pbt]\delta x_2 + \cdots + [ptt]\delta x_t + [ptu] = 0\end{cases}$$

可见，上式与条件观测时的法方程组相比较，权在系数中的位置不同，前者是 $[paa]$，$[pab]$，…；而后者是 $[\frac{aa}{p}]$，$[\frac{ab}{p}]$，…。相应的常数项，一个是由误差方程式系数与其常数项组合而成，如 $[pau]$，$[pbu]$，…；另一个是与条件式的闭合差相同，皆为 $w_i(i = a, b, \cdots, r)$。此外，各系数 $a, b, \cdots$ 的含义也不相同。

二、间接观测的处理步骤

1）根据观测问题的性质，首先要确定必要观测的个数 t，并选定 t 个独立量作为未知数。未知数的选取可以是观测量，也可以是非观测量，但所选未知数之间必须相互独立，不应存在任何确定的函数关系。也就是说，任何一个未知数都不能用其余未知数的函数表出。

2）将每一个观测值的改正数表达成所选未知数的函数，列出观测方程（误差方程）。要注意误差方程式常数项的计算，它是由未知数的近似值和观测值通过线性函数的计算而得。

3）根据误差方程式系数和自由项组成法方程，法方程的个数等于未知数的个数，且其系数阵为对称阵。

4）解算法方程组，求出未知数的解向量。

5）将未知数的解代入误差方程式，求得观测值改正数，进而求得观测值的估值。

上述计算步骤，可通过下面的简单的例子说明。

例[3.1]：如图 3.5 所示，在测站 O 上对 1～4 号点方向观测了 6 个角度，其结果为

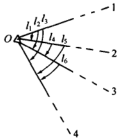


图 3.5

$$l_1 = 48°17'01'' \qquad l_2 = 96°52'19''$$

$$l_3 = 152°54'10'' \qquad l_4 = 48°35'12''$$

$$l_5 = 104°37'07'' \qquad l_6 = 56°01'49''$$

试按间接观测处理。

解:此问题的观测数为 6,可列出 6 个观测方程;必要观测数为 3,应选定 3 个未知数,不妨选$\angle 1O2$,$\angle 2O3$,$\angle 3O4$ 的近似值改正数为未知数 δx_1, δx_2, δx_3。则

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= \delta x_1 + x_1^0 - l_1 \\
v_2 &= \delta x_1 + \delta x_2 + x_1^0 + x_2^0 - l_2 \\
v_3 &= \delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3 + x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 - l_3 \\
v_4 &= \delta x_2 + x_2^0 - l_4 \\
v_5 &= \delta x_2 + \delta x_3 + x_2^0 + x_3^0 - l_5 \\
v_6 &= \delta x_3 + x_3^0 - l_6
\end{aligned}\right\}$$

为计算方便,令未知数的近似值等于相应的三个角度的观测值,即

$x_1^0 = l_1 = 48°17'01''$, $x_2^0 = l_4 = 48°35'12''$, $x_3^0 = l_6 = 56°01'49''$ 代入上式后,得

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= \delta x_1 \\
v_2 &= \delta x_1 + \delta x_2 - 6 \\
v_3 &= \delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3 - 8 \\
v_4 &= \delta x_2 \\
v_5 &= \delta x_2 + \delta x_3 - 6 \\
v_6 &= \delta x_3
\end{aligned}\right\}$$

写成矩阵形式，为

$$
\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -8 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

假定各角度为相互独立的等精度观测值，并权阵为 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$，则法方程系数及常数项为

$$
\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} -14 \\ -20 \\ -14 \end{bmatrix}
$$

解法方程，得

$$
\begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{bmatrix} = -(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 14 \\ 20 \\ 14 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0.5 & -0.25 & 0 \\ -0.25 & 0.5 & -0.25 \\ 0 & -0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 20 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

代入误差方程式中,得观测值改正数为

$$
v_1 = 2, v_2 = -1, v_3 = -1
$$

$$
v_4 = 3, v_5 = -1, v_6 = 2
$$

也就不难得观测量的估值（$\hat{L} = l_i + v_i$）结果,此略。

三、精 度 评 定

在间接观测处理中,单位权中误差的计算按下式,即

$$
m_0 = \pm \sqrt{\frac{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}}{n-t}} \tag{3.66}
$$

式中：n 为观测数；t 为必要观测数。

对上例来讲,单位权中误差为

$$
m_0 = \pm \sqrt{\frac{20}{6-3}} = \pm 2''.6
$$

根据第二章第三节中的内容可知,欲求未知数或未知数函数的精度,关键是求得它们相应的协因数。不难证明,在间接观测处理中,未知数的协因数阵 Q_{XX} 就是法方程系数阵的逆阵,即

$$
\boldsymbol{Q}_{XX}=\boldsymbol{N}^{-1}=\begin{bmatrix} Q_{x_{11}} & Q_{x_{12}} & \cdots & Q_{x_{1t}} \\ Q_{x_{21}} & Q_{x_{22}} & \cdots & Q_{x_{2t}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{x_{t1}} & Q_{x_{t2}} & \cdots & Q_{x_{tt}} \end{bmatrix} \tag{3.67}
$$

由于

$$
\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}
$$

因此

$$
\boldsymbol{Q}_{XX}=\boldsymbol{Q}_{XX}^{\mathrm{T}}
$$

即有

$$
\boldsymbol{Q}_{x_{ij}}=\boldsymbol{Q}_{x_{ji}} \qquad (i \neq j) \tag{3.68}
$$

显然,在(3.67)式中,主对角线上的元素即为各未知数的权倒数;而非对角线上的元素,则称为未知数的相关权倒数。

若有未知数函数为 $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{x}$,根据协因数传播律,可得

$$
\boldsymbol{Q}_{\psi\psi}=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{XX}\boldsymbol{f} \tag{3.69}
$$

将 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}=(f_1,f_2,\cdots,f_t)$ 以及(3.67)式中的 $\boldsymbol{Q}_{XX}$ 代入上式并展开,其纯量形式为

$$
\begin{aligned}
Q_{\psi\psi}= & f_1^2Q_{x_{11}}+2f_1f_2Q_{x_{12}}+\cdots+2f_1f_tQ_{x_{1t}}+f_2^2Q_{X_{22}}+2f_2f_3Q_{x_{23}}+ \\
& \cdots+2f_2f_tQ_{x_{2t}}+\cdots+f_t^2Q_{x_{tt}}
\end{aligned} \tag{3.70}
$$

由上述可见,在间接观测处理中,未知数的协因数阵 $\boldsymbol{Q}_{XX}$,对于求得未知数,评定未知数或未知数函数的精度都是极为重要的。

第五节　附有条件的间接观测处理

在第三章第四节中已指出，间接观测处理时，应选择足够的且又相互独立的未知数。但在某些观测问题中，由于情况特殊所致，使得选定的未知数虽然是必要的，但未知数之间并不都是相互独立的。某些未知数之间存在着一定的联系，经处理后，这些联系条件也应得到满足，这就产生了附有条件的间接观测。

一、原　　理

在第三章第一节中讨论过，如果对某观测问题所选参数的个数 $t < t_1 < n$ 时，也就是说，在未知数之间存在 $(t_1 - t)$ 个线性无关的条件式时，观测的误差方程式和未知数之间的条件方程式，经线性化后，有(3.17)式

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{V} &= \boldsymbol{B}_u \delta \boldsymbol{X} + \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{B}_w \delta \boldsymbol{X} &+ \boldsymbol{W} = \boldsymbol{0} \end{aligned}\right\}$$

现根据最小二乘准则来求未知数 $\delta\boldsymbol{X}$ 和改正数 $\boldsymbol{V}$。为此，按求条件极值的方法组成函数

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{V} + 2\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_w \delta \boldsymbol{X} + \boldsymbol{W}) \tag{3.71}$$

由于 $\boldsymbol{V}$ 是 $\delta\boldsymbol{X}$ 的函数，因此，应使 $\boldsymbol{\Phi}$ 对于 $\delta\boldsymbol{X}$ 的偏导数为零，即

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \delta \boldsymbol{X}} = 2\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \delta \boldsymbol{X}} + 2\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_w = 2\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{B} u + 2\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_w = \boldsymbol{0}$$

由此可得

$$\boldsymbol{B}_u^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{V} + \boldsymbol{B}_w^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} = \boldsymbol{0} \tag{3.72}$$

将误差方程式代入上式并与条件式联立，得法方程组，即

$$\boldsymbol{B}_u^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{B}_u \delta \boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}_w^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} + \boldsymbol{B}_u^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}$$

$$B_w \delta X + W = 0 \tag{3.73}$$

令

$$B_u^T P B_u = N \quad , \quad B_u^T P U = W_t$$

$$N_y = \begin{bmatrix} N & B_w^T \\ B_w & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad Y = \begin{bmatrix} \delta X \\ K \end{bmatrix} \quad , \quad W_y = \begin{bmatrix} W_t \\ W \end{bmatrix}$$

则(3.73)式可简写为

$$\left.\begin{aligned} N\delta X + B_w^T K + W_t = 0 \\ B_w \delta X + W = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.74}$$

或

$$N_y Y + W_y = 0 \tag{3.75}$$

由(3.74)式或(3.75)式,可解出未知数 δX 及 K,将未知数 δX 的解向量再代入误差方程式,可求出观测值的改正数 V。

精度评定时,单位权观测的中误差为

$$m_0 = \sqrt{\frac{V^T P V}{n - t_1 + r}} \tag{3.76}$$

式中:n 为观测值个数;t_1 为选取的未知数个数(大于必要观测数);r 为不独立的未知数个数。

二、示　　例

如图 3.6 所示三角网,A、E 为已知点,B、C、D、F 为待定点。为了加强该网的精度,又观测了 BC 边边长 b_2 及 DC 边方位角 α_2,且它们有足够的精度可作为起算数据。若该网选定了所有待定点坐标为未知数,由于基线 b_2 和方位角 α_2 是不需加改正数的。所以,经数据处理后的 B、C、D 点坐标(X_B, Y_B)、(X_C, Y_C)、

(X_D, Y_D)应满足如下两个条件，即

$$\left.\begin{aligned} b_2 &= \sqrt{(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2} \\ \alpha_2 &= \arctan \frac{Y_C - Y_D}{X_C - X_D} \end{aligned}\right\} \tag{3.77}$$

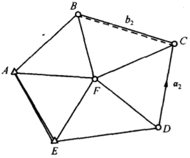


图 3.6

又如图 3.7 所示独立测边网，P_1 为已知点，P_1P_2 边方位角 α_{12}为已知方位角，$P_2 \sim P_6$ 为待定点。若选各待定点坐标为未知数。则 P_2 点的坐标估值应满足如下条件，即

$$\alpha_{12} = \arctan \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \tag{3.78}$$

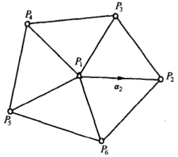


图 3.7

再如图 3.8 所示的部分单导线，P_2 点的坐标估值也应满足(3.78)式。

可见，在待定点上存在有不需加改正数的固定边长或固定方位角时，若以坐标

为未知数,那么固定值的两端点未知数之间就不独立了,必须要满足某种条件,且每有一个不独立的未知数就增加一个条件。

最后指出,附有条件的间接观测处理还可用来解决亏秩网问题或监测网点的统计分析。因此,它具有广泛的应用。

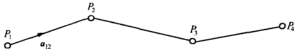


图 3.8

第六节 数字化数据的基本平差模型

数字化数据可以认为是一系列观测值。主要来源于全野外数据采集。遥感或航摄像片以及对原有地形图数字化得到。

假设 $(x_i, y_i)(i = 1,2,\cdots,n)$ 为地物点的数字化坐标观测值,相应的平差值(估值)和改正数为$(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$和(v_{x_i}, v_{y_i}),且有

$$\begin{cases} \hat{x}_i = x_i + v_{x_i} \\ \hat{y}_i = y_i + v_{y_i} \end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{3.79}$$

一、直角与直线模型

如图 3.9 所示,k、i、j 3 点构成一个特定的已知角 β_{ij}^{k}。由于任意一个角度都是由两个方向构成的,若令 $\hat{\alpha}_{ki}$、$\hat{\alpha}_{kj}$分别表示 ki 和 kj 方向的方位角值,则存在如下条件

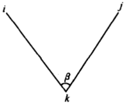


图 3.9

$$\hat{\alpha}_{kj} - \hat{\alpha}_{ki} = \hat{\beta}_{ij}^{k} \tag{3.80}$$

由于

$$\hat{\alpha}_{ki} = \arctan\frac{\hat{y}_i - \hat{y}_k}{\hat{x}_i - \hat{x}_k}, \quad \hat{\alpha}_{kj} = \text{acrtan}\frac{\hat{y}_j - \hat{y}_k}{\hat{x}_j - \hat{x}_k} \tag{3.81}$$

按泰勒级数展开,取至一次项,得

$$\hat{\alpha}_{ki} = \alpha_{ki} + \delta\alpha_{ki}, \qquad \hat{\alpha}_{kj} = \alpha_{kj} + \delta\alpha_{kj} \tag{3.82}$$

式中:α_{ki}和α_{kj}是用观测值计算的方位角值。当注意到

$$\begin{cases} s_{ki}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 = \Delta x_{ki}^2 + \Delta y_{ki}^2 \\ s_{kj}^2 = (x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 = \Delta x_{kj}^2 + \Delta y_{kj}^2 \end{cases} \tag{3.83}$$

时,不难导出

$$\begin{cases} \delta\alpha_{ki} = \dfrac{\Delta y_{ki}}{s_{ki}^2} v_{x_k} - \dfrac{\Delta x_{ki}}{s_{ki}^2} v_{y_k} - \dfrac{\Delta y_{ki}}{s_{ki}^2} v_{x_i} + \dfrac{\Delta x_{ki}}{s_{ki}^2} v_{y_i} \\ \delta\alpha_{kj} = \dfrac{\Delta y_{kj}}{s_{kj}^2} v_{x_k} - \dfrac{\Delta x_{kj}}{s_{kj}^2} v_{y_k} - \dfrac{\Delta y_{kj}}{s_{kj}^2} v_{x_j} + \dfrac{\Delta x_{kj}}{s_{kj}^2} v_{y_j} \end{cases} \tag{3.84}$$

若令

$$\begin{cases} a_{ki} = \dfrac{\Delta y_{ki}}{s_{ki}^2} = \dfrac{\sin\alpha_{ki}}{s_{ki}} \\ b_{ki} = -\dfrac{\Delta x_{ki}}{s_{ki}^2} = -\dfrac{\cos\alpha_{ki}}{s_{ki}} \end{cases} \tag{3.85}$$

同理

$$\begin{cases} a_{kj} = \dfrac{\Delta y_{kj}}{s_{kj}^2} = \dfrac{\sin\alpha_{kj}}{s_{kj}} \\ b_{kj} = -\dfrac{\Delta x_{kj}}{s_{kj}^2} = -\dfrac{\cos\alpha_{kj}}{s_{kj}} \end{cases}$$

至此,将(3.82)、(3.84)和(3.85)式代入(3.80)式,得

$$(a_{kj}-a_{ki})v_{x_k}+(b_{kj}-b_{ki})v_{y_k}+a_{ki}v_{x_i}+b_{ki}v_{y_i}-$$

$$a_{kj}v_{x_j}-b_{kj}v_{y_j}+w_k=0 \tag{3.86}$$

式中：$w_k=(\alpha_{kj}-\alpha_{ki})-\beta_{ij}^{k}$。

容易理解,(3.86)式中的自由项 w 是以弧度单位出现的,若以角秒为单位,则相应(3.85)式的等号右端都要乘以 $\rho''=206\ 265$。当 $\beta_{ij}^{k}=\frac{\pi}{2}$(或$\frac{3\pi}{2}$)时,(3.86)式表示的是直角条件;当 $\beta_{ij}^{k}=\pi$ 时,(3.86)式表示的就是直线条件。

直角房屋以及部分直角的情形在地图数字化工作中相当普遍,也是规则地物中的典型情况。对直角房屋的每一个直角,可仿(3.86)式列出条件方程。如图 3.10 所示房屋,有 6 个墙角点,坐标观测数 $n=12$,必要观测数 $t=7$,则 $r=12-7$,可列出 5 个条件方程。对于第 5 个角,显然 $\beta_{64}^{5}=\frac{3\pi}{2}$。

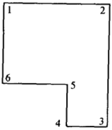


图 3.10

一般说来,对于一个有 N 个顶点的直角形房屋,其观测数 $n=2N$,必要观测数 $t=N+1$,而多余观测数 $r=N-1$,即可列出 $N-1$ 个条件方程。

二、平行线模型

对于平行的道路边线、桥梁等,存在以下条件,如图 3.11 所示

$$\hat{\alpha}_{ij}-\hat{\alpha}_{kl}=0 \tag{3.87}$$

式中:$\hat{\alpha}_{ij}$和$\hat{\alpha}_{kl}$的意义同(3.81)式相一致。仿(3.86)式推证过程,经整理,得条件式

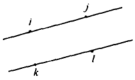


图 3.11

$$a_{ij}v_{x_i}+b_{ij}v_{y_i}-a_{ij}v_{x_j}-b_{ij}v_{y_i}-a_{kl}v_{x_k}-b_{kl}v_{y_k}+$$

$$a_{kl}v_{x_l}+b_{kl}v_{y_l}+w=0 \tag{3.88}$$

式中:

$$
\begin{cases}
a_{ij} = \dfrac{\sin\alpha_{ij}}{s_{ij}}, \qquad b_{ij} = -\dfrac{\cos\alpha_{ij}}{s_{ij}} \\
a_{kl} = \dfrac{\sin\alpha_{kl}}{s_{kl}}, \qquad b_{kl} = -\dfrac{\cos\alpha_{kl}}{s_{kl}} \\
w = \alpha_{ij} - \alpha_{kl} = \arctan\dfrac{y_j - y_i}{x_j - x_i} - \arctan\dfrac{y_l - y_k}{x_l - x_k}
\end{cases} \tag{3.89}
$$

不难理解,(3.88)式中的自由项也与(3.86)式中的自由项同性,可以弧度为单位计算;也可以角秒为单位计算,若取后者时,相应地(3.89)式中的 a、b 系数值要乘以 ρ''。

当平行线上有多个点时,可以列出几个直线条件和一个平行条件。

三、距离模型

设 i、j 两点间的距离为给定值 S_{ij},则存在下列条件:

$$
\sqrt{(\hat{x}_j - \hat{x}_i)^2 + (\hat{y}_j - \hat{y}_i)^2} - S_{ij} = 0 \tag{3.90}
$$

经线性化后,得

$$
c_{ij}v_{x_i} + d_{ij}v_{y_i} - c_{ij}v_{x_j} - d_{ij}v_{y_j} + w = 0 \tag{3.91}
$$

式中:

$$
\left.
\begin{aligned}
c_{ij} &= -\frac{\Delta x_{ij}}{s_{ij}} = -\cos\alpha_{ij} \\
d_{ij} &= -\frac{\Delta y_{ij}}{s_{ij}} = -\sin\alpha_{ij} \\
w &= s_{ij} - S_{ij}
\end{aligned}
\right\} \tag{3.92}
$$

由于

$$
c_{ij} = -c_{ji}, \qquad d_{ij} = -d_{ji} \tag{3.93}
$$

于是，(3.91)式又可写为

$$c_{ij}v_{x_i} + d_{ij}v_{y_i} + c_{ji}v_{x_j} + d_{ji}v_{y_j} + w = 0 \tag{3.94}$$

四、面 积 模 型

如图 3.12 所示的封闭多边形，其顶点为 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$，面积为给定值 A，

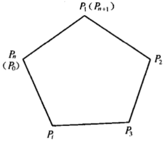


图 3.12

则存在如下条件：

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i(\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_{i-1}) - A = 0 \tag{3.95}$$

式中：$P_n = P_0$；$P_{n+1} = P_1$。经线性化后，得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i v_{y_i} + w = 0 \tag{3.96}$$

式中：

$$\begin{cases} a_i = \dfrac{1}{2}(y_{i+1} - y_{i-1}) \\ b_i = \dfrac{1}{2}(x_{i-1} - x_{i+1}) \\ w = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i(y_{i+1} - y_{i-1}) - A \end{cases} \tag{3.97}$$

若多边形中含有圆弧，如图 3.13 所示，在 P_1P_2 边处有一外凸的圆弧，在 P_i 点处，有一个外凹的圆弧，则存在如下条件：

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i(\hat{y}_{i+1}-\hat{y}_{i-1})+\sum_{j=1}^{m}\pm\frac{\hat{R}_j^2}{2}(\hat{\alpha}_j-\sin\hat{\alpha}_j)-A=0 \tag{3.98}$$

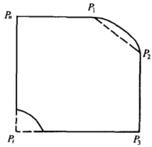


图 3.13

经线性化后，得

$$\sum_{i=1}^{n}a_iv_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}b_iv_{y_i}+\sum_{j=1}^{m}\pm R_j(\alpha_j-\sin\alpha_j)\delta R_j+$$
$$\sum_{j=1}^{m}\pm\frac{1}{2}R_j^2(1-\cos\alpha_j)\delta\alpha_j+w=0 \tag{3.99}$$

式中：R_j 为第 j 个圆弧的半径；α_j 为圆弧的圆心角。

$$\begin{cases}a_i=0.5(y_{i+1}-y_{i-1}); \quad b_i=0.5(x_{i-1}-x_{i+1});\\ w=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i(y_{i+1}-y_{i-1})+\sum_{j=1}^{m}\pm\frac{R_j^2}{2}(\alpha_j-\sin\alpha_j)-A。\end{cases} \tag{3.100}$$

顺便指出，(3.98)式第二项中的“±”号，相对于封闭多边形，当圆弧是外凸时取“+”号；当圆弧外凹时取“-”号。

五、圆曲线条件

如图 3.14 所示圆曲线，其中 R 为圆曲线半径，(x_0, y_0)是圆心坐标。

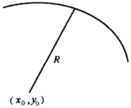


图 3.14

如果在圆曲线上数字化点 $N \geqslant 3$，则对每个点都可以列出以下条件

$$(\hat{x}_i - x_0)^2 + (\hat{y}_i - y_0)^2 = R^2 \tag{3.101}$$

若将 (x_0, y_0) 和 R 作为未知参数，对上式经线性化后，得

$$\Delta x_{oi} v_{x_i} + \Delta y_{oi} v_{y_i} - \Delta x_{oi} \delta \hat{x}_0 - \Delta y_{oi} \delta \hat{y}_0 - R^0 \delta R + w = 0 \tag{3.102}$$

式中：v_{x_i}、v_{y_i} 为圆曲线上数字化点的坐标改正数；$\delta\hat{x}_0$，$\delta\hat{y}_0$ 为圆心点坐标改正数；δR 为圆曲线半径 R 的改正数；不难看出，各项系数均为圆曲线上数字化点的近似坐标与圆心点近似坐标之差值和近似半径 R^0 的计算值。条件方程中的常数项（自由项）为

$$w = \frac{(x_i - x_0^0)^2 + (y_i - y_0^0)^2 - R^{02}}{2} \tag{3.103}$$

六、道路曲线的误差方程

道路曲线是由直线和规则曲线组成，有严格的数学模型。若采用间接观测方法建立平差模型，则有

1．直线段的误差方程

设 (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为数字化观测值，其相应的平差值为 $(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$，改正数为 (v_{x_i}, v_{y_i})。直线段的估值方程为

$$\hat{y} = \hat{k}_1 \hat{x} + \hat{k}_2 \tag{3.104}$$

取坐标 $\hat{x}_i$ 和系数 $\hat{k}_1$、$\hat{k}_2$ 为未知数，并令

$$\left.\begin{aligned} \hat{y} &= y_i + v_{y_i}, \quad & \hat{k}_1 &= k^{\circ}{}_1 + \delta k_1 \\ \hat{x} &= x^{\circ}{}_i + \delta x_i, \quad & \hat{k}_2 &= k^{\circ}{}_2 + \delta k_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.105}$$

则直线段数字化点的误差方程为

$$\begin{cases} v_{x_i} = \delta x_i - (x_i - x_i^0) \\ v_{y_i} = k_1^0 \delta x_i + x_i^0 \delta k_1 + \delta k_2 - (y_i - y_i^0) \end{cases} \tag{3.106}$$

式中：

$$y_i^0 = k_1^0 x_i^0 + k_2^0$$

2. 圆曲线段的误差方程

圆曲线方程(3.101)式写成参数方程形式，有

$$\left.\begin{aligned} \hat{x} &= \hat{x}_0 + \hat{R}\cos\hat{\varphi} \\ \hat{y} &= \hat{y}_0 + \hat{R}\sin\hat{\varphi} \end{aligned}\right\} \tag{3.107}$$

取圆心坐标$(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$、半径 $\hat{R}$ 和 $\hat{\varphi}$ 作为未知数，并令

$$\begin{cases} \hat{x} = x + v_x \\ \hat{y} = y + v_y \end{cases}, \quad \begin{cases} \hat{x}_0 = x_0^0 + \delta x_0 \\ \hat{y}_0 = y_0^0 + \delta y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \hat{R} = R^0 + \delta R \\ \hat{\varphi} = \varphi^0 + \delta\varphi \end{cases} \tag{3.108}$$

则圆曲线段数字化点的误差方程为

$$\left.\begin{aligned} v_{x_i} &= \delta x_0 + \cos\varphi_i^0 \delta R - R^0 \sin\varphi_i^0 \frac{\delta\varphi_i}{\rho} - (x_i - x_i^0) \\ v_{y_i} &= \delta y_0 + \sin\varphi_i^0 \delta R + R^0 \cos\varphi_i^0 \frac{\delta\varphi_i}{\rho} - (y_i - y_i^0) \end{aligned}\right\} \tag{3.109}$$

式中：$\rho = 206\ 265$，且

$$\left.\begin{aligned} x_i^0 &= x_0^0 + R^0\cos\varphi^0 \\ y_i^0 &= y_0^0 + R^0\sin\varphi^0 \end{aligned}\right\} \tag{3.110}$$

3. 缓和曲线段的误差方程

如图 3.15 所示，以缓和曲线起点（直线段与缓和曲线交点 ZH）B 为局部坐标系原点，以该点的切线方向为横轴，以其法线方向为纵轴，构成 $\tilde{x}B\tilde{y}$ 坐标系。在此局部坐标系中，缓和曲线段有如下参数方程：

$$
\begin{cases}
\tilde{x}_i = l_i\left(1 - \dfrac{\beta_i^2}{10} + \dfrac{\beta_i^4}{216} - \dfrac{\beta_i^6}{9360} + \cdots\right) \\
\tilde{y}_i = \dfrac{\beta_i l_i}{3}\left(1 - \dfrac{\beta_i^2}{14} + \dfrac{\beta_i^4}{440} - \dfrac{\beta_i^6}{25\,200} + \cdots\right)
\end{cases}
\tag{3.111}
$$

式中：l_i 为 B 点到 i 点的曲线长度；β_i 为缓和曲线上 i 点的转折角，也就是 i 点处切线在 $\tilde{x}B\tilde{y}$ 坐标系中的方位角。

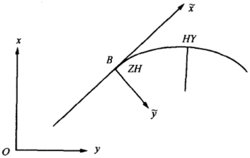


图 3.15

设 l_0 为缓和曲线的总长，R 为缓和曲线终点处圆曲线的半径，则 β_i 与 l_i 有如下关系：

$$
\left.
\begin{aligned}
\beta_i &= \frac{l_i^2}{2Rl_0} \\
\beta_0 &= \frac{l_0}{2R}
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.112}
$$

式中：β_0 表示缓和曲线终点的转折角。将(3.112)式代入(3.111)式中，有

$$\left.\begin{aligned}\tilde{x}_i &= l_i - \frac{l_i^5}{40R^2 l_0^2} + \frac{l_i^9}{3456R^4 l_0^4} - \cdots \\ \tilde{y}_i &= \frac{l_i^3}{6Rl_0} - \frac{l_i^7}{336R^3 l_0^3} + \frac{l_i^{11}}{42\,240R^5 l_0^5} - \cdots\end{aligned}\right\} \tag{3.113}$$

对上式微分,得

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{x}_i &= \cos(\beta_i^0)\mathrm{d}l_i + \tilde{a}_{xR}\mathrm{d}R + \tilde{a}_{xl_0}\mathrm{d}l_0 \\ \mathrm{d}\tilde{y}_i &= \sin(\beta_i^0)\mathrm{d}l_i + \tilde{a}_{yR}\mathrm{d}R + \tilde{a}_{yl_0}\mathrm{d}l_0\end{aligned}\right\} \tag{3.114}$$

式中:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{a}_{xR} &= \frac{l_i^5}{20R^3 l_0^2} - \frac{l_i^9}{864R^5 l_0^4} \\ \tilde{a}_{yR} &= -\frac{l_i^3}{6R^2 l_0} + \frac{l_i^7}{112R^4 l_0^3} - \frac{l_i^{11}}{8448R^6 l_0^5} \\ \tilde{a}_{xl_0} &= \frac{R}{l_0}\tilde{a}_{xR} \quad , \quad \tilde{a}_{yl_0} = \frac{R}{l_0}\tilde{a}_{yR}\end{aligned}\right\} \tag{3.115}$$

缓和曲线局部坐标系 $\tilde{x}B\tilde{y}$ 与大地坐标系 xoy 之间的转换矩阵为

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\left(\alpha + C \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\alpha & \sin\left(\alpha + C \cdot \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_i \\ \tilde{y}_i \end{bmatrix} \tag{3.116}$$

式中:α 为直缓点 B 处切线的方位角,也就是直线段的方位角;(x_B, y_B)为直缓点 B 在大地坐标系中的坐标;C 为缓和曲线偏转参数($C=1$ 时表示右偏;$C=-1$ 时表示左偏)。式中的 α 与(x_B, y_B)的关系为

$$\left.\begin{aligned}k_1 &= \tan\alpha \\ y_B &= k_1 x_B + k_2\end{aligned}\right\} \tag{3.117}$$

对上式微分，得

$$\left.\begin{aligned} dk_1 &= \frac{\delta\alpha}{\rho\cos^2\alpha} \\ dy_B &= k_1^0\delta x_B + x_B^0\delta k_1 + \delta k_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.118}$$

则缓和曲线段数字化点的误差方程为

$$\left.\begin{aligned} v_{x_i} &= \delta x_B + \cos(\alpha^0 - \beta_i^0)dl_i + a_{xk}\delta k_1 + a_{xR}dR + a_{xl_0}\delta l_0 - (x_i - x_i^0) \\ v_{y_i} &= \delta y_B + \sin(\alpha^0 - \beta_i^0)dl_i + a_{yk}\delta k_1 + a_{yR}dR + a_{yl_0}\delta l_0 - (y_i - y_i^0) \end{aligned}\right\} \tag{3.119}$$

式中：

$$\left.\begin{aligned} a_{xk} &= (-\tilde{x}_i^0\sin\alpha^0 - \tilde{y}_i^0\cos\alpha^0)\cos^2\alpha^0 \\ a_{yk} &= (\tilde{x}_i^0\cos\alpha^0 - \tilde{y}_i^0\sin\alpha^0)\cos^2\alpha^0 \end{aligned}\right\} \tag{3.120}$$

$$\begin{bmatrix} a_{xR} & a_{xl_0} \\ a_{yR} & a_{yl_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha^0 & -\sin\alpha^0 \\ \sin\alpha^0 & \cos\alpha^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{xR} & \tilde{a}_{xl_0} \\ \tilde{a}_{yR} & \tilde{a}_{yl_0} \end{bmatrix} \tag{3.121}$$

顺便指示，当平差多个道路曲线时，其单位权中误差的估值为

$$\hat{\sigma}_0 = \pm\sqrt{\frac{\sum_{\lambda=1}^{M}\mathbf{V}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{V}_i}{\sum_{i=1}^{M}(2n_i - t_i)}} \tag{3.122}$$

式中：M 为平差的道路曲线条数；n_i，t_i 为第 i 条曲线的数字化总点数和必要观测数。

第七节　数字化数据的分级平差概念

在数字化的实际工作中，为了实现对图形的几何纠正，不仅要处理单个独立的直角房屋、平行线和直线，而且更为普遍的情况是对复杂地物的处理，正确地反映地物间的相互关系。为了解决这种多条件的混合问题，可以借用“分级控制、逐级平差”的思想。

一、数字化数据的分级平差原则

如图 3.16 所示，直角房屋 A、B、C 邻接在一起，它们之间是相关的，有公共点和公共边存在。若将房屋 A、B、C 的顶点集分别记为 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$B=\{3,4,9,10\}$，$C=\{9,10,11,12,13,14,15\}$。显然有：$A\cap B=\{3,4\}$，$B\cap C=\{9,10\}$。对于这类有公共点和公共边的图形，通常采用下述两种方法处理：

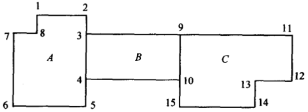


图 3.16

1) 采用分别处理的方法，即对 A、B、C 分别列出上述条件方程，然后组成法方程求解，但由于图形之间的相关性，结果会导致原 A、B 间公共点 3、4 和 B、C 之间公共点 9、10 不再是公共顶点，由 3，4 点和 9，10 点构成的两条边在原位置处可能会发生交错或分离，并且 2，3，4，5 四点之间和 9，10，15 三点之间的共线关系遭到破坏，将出现图形的混乱，达不到数据处理后既提高图形质量又保持图形间应有的几何关系的目的。

2) 采用顺序平差的方法，即按某种顺序对成片房屋中的各个直角房屋进行处理，并以每次平差后的坐标作为已知点参与下一个直角房屋的纠正。仍以图 3.16 为例，按 A，B，C 的顺序对这三个房屋进行平差，其结果使得图形的几何条件和图形质量得到了保证，但由于采用顺序平差处理，会导致数字化数据的误差逐次积累。使纠正后的最后图形与原图发生较大偏移。

为了克服上述方法的缺陷，可以借鉴传统测量中“先控制后细部，先总体后局部”的原则，将其引入到地图数字化中对复杂地物（如成片构筑物）平差的处理，采用分级控制，逐级平差的方法。

对于较简单的图形，如独立地物等，当需要考虑的条件方程较少时，不必分级，

可列出条件方程后统一平差。

对于较复杂的图形可分为两级。首先以成片房屋的外围特征点作为首级控制点，构成一个闭合路线，列出条件方程对其进行平差处理，将平差后的坐标点作为下一级平差的固定点，然后再对片内房屋进行平差处理。

对于特别复杂的图形可分为三级。在对外围特征点作为首级控制点平差后，以这些经处理后的控制点作为起、终点，构成数条附合路线，对其进行平差；然后将区域再次划分，将平差后的坐标点也作为固定点对区域内的构筑物进行几何纠正。

二、分级平差的条件方程与求解

分级平差时，是将上一级平差后的坐标点作为固定点，此时相应点在条件式中的未知数等于零。例如，建立(3.86)式或(3.88)式所列的条件方程时，应在式中去掉与固定点有关的项，将它们并入常数项。假定在(3.86)式中 k 为固定点，则条件方程变为

$$a_{ki}v_{x_i} + b_{ki}v_{y_i} - a_{kj}v_{x_j} - b_{kj}v_{y_j} + w_k = 0 \tag{3.123}$$

式中：

$$w_k = (\arctan\frac{y_i - \hat{y}_k}{x_i - \hat{x}_k} - \arctan\frac{y_j - \hat{y}_k}{x_j - \hat{x}_k}) - \beta_{ij}^{k} \tag{3.124}$$

式中：$(\hat{x}_k, \hat{y}_k)$为上一级平差得到的坐标值，这里没有考虑固定点的误差。如果考虑固定点的误差，也可以类似地列出条件方程。在每个选定的范围内，将所列各种条件联合组成条件方程

$$\boldsymbol{AV} + \boldsymbol{W} = \boldsymbol{0} \tag{3.125}$$

按着条件观测处理的方法，得

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{K} &= -(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{W} \\ \hat{\boldsymbol{L}} &= \boldsymbol{L} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K} \end{aligned}\right\} \tag{3.126}$$

其平差值 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 的协因数阵$\boldsymbol{Q}_{\hat{L}}$和方差阵$\boldsymbol{D}_{\hat{L}}$的计算式为

$$
\begin{cases} Q_{\hat{L}} = Q - QA^{\mathrm{T}}(AQA^{\mathrm{T}})^{-1}AQ \\ D_{\hat{L}} = \hat{\sigma}_0^2 Q_{\hat{L}} \end{cases} \tag{3.127}
$$

式中：$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}^{-1}$；$\boldsymbol{Q}$ 为观测值的协因数阵；$\boldsymbol{P}$ 为 $\boldsymbol{L}$ 的权阵。一般认为，数字化各点的坐标观测值是独立和等精度的，所以 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{E}$（为单位矩阵）。

对一幅数字化地图，由下式即可从总体上评定数字化成果的精度和质量

$$
\hat{\sigma}_0 = \pm\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{m_j} \boldsymbol{V}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{V}_i}{\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{m_j} r_i}} \tag{3.128}
$$

式中：M 为参加平差的地物类别数；$m_j(j=1,2,\cdots,M)$ 为参加平差的各类地物个数；r_i 为条件方程数。

第八节　误差方程式在平面网中的特点

由第三章第六节中的内容可知，如果平面控制网（例如三角网，边网或导线网）选取的观测元素是角度或边长，当采用间接观测处理时，(3.86)和(3.94)两式

$$
(a_{kj}-a_{ki})v_{x_k}+(b_{kj}-b_{ki})v_{y_k}+a_{ki}v_{x_i}+b_{ki}v_{y_i}-a_{kj}v_{x_j}-b_{kj}v_{y_j}+w_k=0
$$

与

$$
c_{ij}v_{x_i}+d_{ij}v_{y_i}-c_{ij}v_{x_j}-d_{ij}v_{y_i}+w=0
$$

改写成误差方程式的形式，有

角度误差方程式

$$
\begin{aligned} v_{ij}^k = {} & (a_{kj}-a_{ki})\delta x_k+(b_{kj}-b_{ki})\delta y_k-a_{kj}\delta x_j-b_{kj}\delta y_j+ \\ & a_{ki}\delta x_i+b_{ki}\delta y_i+l_{ij}^k \end{aligned} \tag{3.129}
$$

式中：

$$
\begin{aligned}
l_{ij}^{k} &= (\alpha_{kj} - \alpha_{ki}) - \beta_{ij}^{k} \\
&= \beta_{ikj}^{近} - \beta_{ikj}^{观}
\end{aligned}
\tag{3.130}
$$

边长误差方程式

$$
v_{s_{ki}} = c_{ki}\delta x_k + d_{ki}\delta y_k - c_{ki}\delta x_i - d_{ki}\delta y_i + l_{ki} \tag{3.131}
$$

式中：

$$
l_{ki} = s_{ki} - S_{ki} = s_{ki}^{近} - S_{ki}^{观} \tag{3.132}
$$

显而易见，(3.129)与(3.131)两式中都是以控制点的坐标改正数为未知数的。下面分别讨论这二类误差方程式的特点。

一、角度误差方程式的特点

(3.129)式所表达的角度误差方程式实际上是由两个方向误差方程式 v_{ki} 与 v_{kj} 合成($v_{ij}^{k} = v_{kj} - v_{ki}$)而来的。式中的方向系数(以 ki 方向为例)

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{ki} &= \frac{\Delta y_{ki}}{s_{ki}^{2}} = \frac{\sin\alpha_{ki}}{s_{ki}} \\
b_{ki} &= -\frac{\Delta x_{ki}}{s_{ki}^{2}} = -\frac{\cos\alpha_{ki}}{s_{ki}}
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.133}
$$

式中：Δx_{ki}、Δy_{ki}、α_{ki} 及 s_{ki} 分别是 ki 两点之间的近似坐标增量，近似方位角以及近似边长。

考虑到(3.129)式的左端角度改正数 v_{ij}^{k} 通常是以角秒为单位，为了与等式右端相匹配，各方向系数均应乘以 $\rho = 206\ 265$；有时为限制方向系数的数值过大，也常取 s_{ki} 以 km 为单位，坐标改正数 δx、δy 以 dm 为单位，此时的方向系数又可写为

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{ki} &= \frac{\rho'' \sin\alpha_{ki}}{10^{4} s_{ki}} \\
b_{ki} &= -\frac{\rho'' \cos\alpha_{ki}}{10^{4} s_{ki}}
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.134}
$$

由第三章第六节中的图 3.9 可知，(3.86)式表达的是以 k 点为测站点，分别以 i、j 为照准方向的角度误差方程式，并且认为此时的 k、i、j3 点均为待定点(未知点)。特殊情况下，当 k、i、j3 点中的某一点(或两点或全部)为固定点(已知点)时，由于与其相应的坐标改正数 $\delta x=\delta y=0$，因此(3.129)式中的相应项就可以省略了。假如测站 k 为固定点，照准点 i、j 为待定点，则(3.129)式可以写为

$$v_{ij}^{k}=-a_{kj}\delta x_{j}-b_{kj}\delta y_{j}+a_{ki}\delta x_{i}+b_{ki}\delta y_{i}+l_{ij}^{k} \tag{3.135}$$

同理，当测站 k 为待定点，照准点 i、j 分别为固定点时，则相应地分别有

$$\left.\begin{aligned} v_{ij}^{k}&=(a_{kj}-a_{ki})\delta x_{k}+(b_{kj}-b_{ki})\delta y_{k}-a_{kj}\delta x_{j}-b_{kj}\delta y_{j}+l_{ij}^{k}\\ v_{ij}^{k}&=(a_{kj}-a_{ki})\delta x_{k}+(b_{kj}-b_{ki})\delta y_{k}+a_{ki}\delta x_{i}+b_{kj}\delta y_{i}+l_{ij}^{k}\end{aligned}\right\} \tag{3.136}$$

顺便指出，由 k、j 及 i 3 点构成的三角形，三个角度误差方程式的常数项之和应为

$$l_{ij}^{k}+l_{jk}^{i}+l_{ki}^{j}=-w \tag{3.137}$$

式中：w 为该三角形的角度闭合差。依此式可对角度误差方程式的常数项进行是否正确性检核。

二、边长误差方程式的特点

(3.94)式所表达的边长误差方程式是以直接观测边长作为估计量，以 k、i 两点的坐标改正数为未知数推导出来的。式中的系数

$$\left.\begin{aligned} c_{ki}&=-\frac{\Delta x_{ki}}{s_{ki}}=-\cos\alpha_{ki}\\ d_{ki}&=-\frac{\Delta y_{ki}}{s_{ki}}=-\sin\alpha_{ki}\end{aligned}\right\} \tag{3.138}$$

式中：α_{ki}是 ki 方向的近似方位角。显然，有

$$
\left.\begin{aligned} c_{ki} &= -c_{ik} \\ d_{ki} &= -d_{ik} \end{aligned}\right\} \tag{3.139}
$$

在特殊情况下,当 k 为固定点、i 为待定点时,(3.131)式可以写为

$$
v_{s_{ki}} = -c_{ki}\delta x_i - d_{ki}\delta y_i + l_{ki} \tag{3.140}
$$

反之,则可写为

$$
v_{s_{ki}} = c_{ki}\delta x_k + d_{ki}\delta y_k + l_{ki} \tag{3.141}
$$

当 k、i 皆为固定点时,则有

$$
v_{s_{ki}} = l_{ki} \tag{3.142}
$$

对于前面讨论的角度误差方程式,当 k、i、j3 点皆为固定点时,也有与上式相类似的表述,即

$$
v_{ij}^{k} = l_{ij}^{k} \tag{3.143}
$$

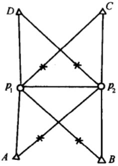


图 3.17

(3.142)式与(3.143)式并不涉及到未知数,它与解算未知数也就无关,但它应参与精度计算。

下面结合图 3.17 所示的测边网来进一步说明边长误差方程式在组成时的注意事项。

1) 网中误差方程式的个数应等于观测边的总数,该网应列出 9 个边长误差方程式。

2) 待定点 p_1 和 p_2 之间的边长误差方程式中含 5 项,其中有 4 个未知数项及 1 个常数项;待定点与固定点间的边长(如 Ap_1)误差方程式中含 3 项,其中有 2 个未知数项及 1 个常数项。在这些方程式中,同名未知数前的系数,其绝对值相等、符号相反;不同名未知数前的系数,其平方和等于 1。

3) 凡用来计算待定点近似坐标的这些边长(称其为必要观测边,图中画 * 号边)的误差方程式常数项必等于零,其他边(称其为多余观测边)的误差方程式常数项一般不等于零。

最后，不加证明地在这里直接给出利用边长计算待定点坐标的公式：

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= x_1 + \Delta x_{13} \\ y_3 &= y_1 + \Delta y_{13} \end{aligned}\right\} \tag{3.144}$$

式中：

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_{13} &= A\Delta x_{12} + B\Delta y_{12} \\ \Delta y_{13} &= A\Delta y_{12} - B\Delta x_{12} \end{aligned}\right\} \tag{3.145}$$

其中：

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{s_{13}}{s_{12}}\right)^2 - \left(\frac{s_{23}}{s_{12}}\right)^2\right] \\ B &= \sqrt{\left(\frac{s_{13}}{s_{12}}\right)^2 - A} \end{aligned}\right\} \tag{3.146}$$

在使用以上公式时，三角形顶点始终要从起算点开始，按逆时针方向编号，见图3.18所示。

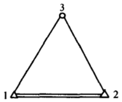


图 3.18

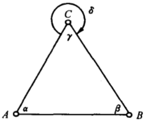


图 3.19

思考题与习题

1. 客观世界中，变量之间的关系是如何大致分类的？通常情况下，为求母体参数的估值，要通过哪三个步骤？

2. 为什么说公式 $\boldsymbol{AV} + \boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{W}u = \boldsymbol{0}$ 具有常用的几种数学模型的通式含义？

3．请用条件观测处理的方法，证明单一三角形闭合差平均分配法则的正确性。

4．如图 3.19 所示，同精度观测了 α、β、γ 和 δ 角，试按条件观测处理导出 γ 角的最或然值(估值)。

5．如图 3.20 所示，A 为已知点，$p_j(j=1,2,\cdots,5)$ 为待定点，假定各路线观测高差 $h_i(i=1,2,\cdots,9)$ 均为等精度观测值，请列出条件式并组成法方程式。你认为该水准网的布设有何缺陷？

6．如图 3.21 所示平面网，观测了全部内角，请问：

1）条件式的个数是多少？

2）说出具体的条件式种类及其个数。

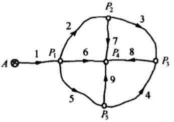


图 3.20

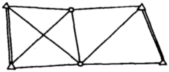


图 3.21

7．如图 3.22 所示平面网，观测了 7 个内角，请列出全部的条件方程式。

8．间接观测处理时，其法方程式与条件观测处理时的法方程式有什么区别？

9．如何计算出误差方程式的各系数以及常数项的数值？

10．请用间接观测处理的方法证明单一三角形闭合差平均分配法则的正确性。

11．为什么说“必要观测边”的误差方程式中的常数项必等于零，而“多余观测边”的误差方程式中的常数项一般不等于零？

12．如图 3.23 所示，1、2 为已知点，3 为待定点，在 1 点上观测了边长 s_{13} 和角度 β，请列出边长和角度观测值的误差方程式，待定点的平面位置可以被确定吗？是否有可靠性？

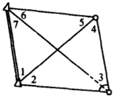


图 3.22

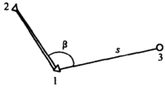


图 3.23

13．如图 3.24 所示前交定点，在已知点 1、2、3 上观测了 4 个角度，待定点号为 4。请列出角度观测的误差方程式并组成法方程式。

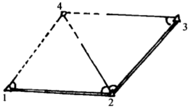


图 3.24

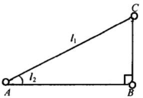


图 3.25

14. 如图 3.25 所示直角△ABC，已知边长 $s_{AB}=100.000\text{m}$，观测边长 $l_1=115.470\text{m}$，观测角 $l_2=29°59'55''$，假设观测值的中误差分别为 $m_{l_1}=\pm 5\text{mm}$，$m_{l_2}=\pm 4''$，试按间接观测处理求出 h_{BC} 的估值。

15. 设有误差方程式为

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\ 6\\ 1\end{bmatrix},$$

若观测的权阵 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$，假定单位权中误差 $\sigma_0=1$，求未知数 x_2、改正数 v_3 以及估值 $\overline{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{L}+\mathbf{V}$ 的精度。

16. 试证明在间接观测处理中，未知数向量 $\delta\boldsymbol{X}$ 与改正数向量 $\mathbf{V}$ 之间是互不相关的。

17. 若对某一问题按条件观测处理，则有条件方程式为

$$\begin{cases}v_1+v_2+v_3+8=0\\ v_4+v_5+v_6-9=0\\ v_1+v_4+7=0\\ 1.8v_2-0.3v_3+v_5-v_6-5=0\end{cases}$$

试求按间接观测处理时的误差方程式。

18. 如图 3.26 所示水准网，A 点高程为 $H_A=5.000\text{m}$，各段高差均为等精度观测值且分别为 $h_1=1.215$，$h_2=2.068$，$h_3=-0.850$，$h_4=2.759$，$h_5=1.903$，$h_6=0.861$，$h_7=-2.760$(单位均为 m)。若取待定点 4 的高程为未知数 X，其相

应的近似值 $X^0=9.830$,试按附有未知数的条件观测处理:

1) 列出条件方程并组成法方程;

2) 求最弱点 4 的高程估值的协因数。

19. 如图 3.27 所示单三角形,三内角均为等精度观测值且分别为: $l_1=61°20'11.3''$, $l_2=78°08'21.9''$, $l_3=40°31'28.4''$。若选取了三内角的估值 L_i 为未知数 $X_i(i=1,2,3)$,试按附有条件的间接观测处理方法,求定各角度估值及观测值的改正数。

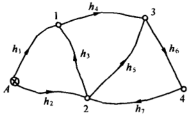


图 3.26

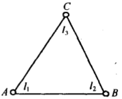


图 3.27

第四章　法方程组的解算与其他观测问题

第一节　法方程组的解算

在对观测数据处理时，当条件式或误差方程式的最终形式列出之后，下一个计算步骤就是根据实际的观测问题，按(3.30)式、(3.47)式、(3.63)式及(3.73)式中的之一组成法方程。

法方程的特点是，其系数矩阵 $\boldsymbol{N}$ 中的各个元素总是按着一定规律排列的。每个法方程的系数阵都是对称正定矩阵。亦即 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}, \det\boldsymbol{N}\geqslant 0$ 且一般地 $\det\boldsymbol{N}\neq 0$。

法方程的解算方法有许多，大体上可分为直接解法和迭代解法两种不同的类别。

直接法就是经过有限的约化步骤之后，在理论上能够达到准确解的方法。但在实际运算中通常不可避免有舍入误差，因此，其所得的结果仍是近似的。直接法的工作量较省，系数矩阵的维数一般也不宜过大，而且个别环节出错将会影响全局，故每步计算的正确性要求较严。

迭代法就是按一定的迭代方式，从某初始值出发，逐次逼近真解的方法。通常用迭代趋向于真解是一个极限过程，虽然法方程系数矩阵是一个对称正定阵，迭代过程的收敛性一般不成问题，但迭代法的运算量一般都较大。它便于程序设计，有自动校正的功能，迭代过程中能将运算的某个差错自动地平整校正，计算结果的准确度比较均匀。

一、高斯约化法

高斯约化法的基本思想，就是逐个消去未知数。现以 3 个未知数为例，以矩阵形式表达的法方程为

$$\begin{bmatrix}[aa] & [ab] & [ac]\\ [ab] & [bb] & [bc]\\ [ac] & [bc] & [cc]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[al]\\ [bl]\\ [cl]\end{bmatrix}\tag{4.1}$$

第一次约化时系借用第一式对第二第三两式消去 x_1，实际是对法方程(4.1)式两边都左乘以

$$\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{[ab]}{[aa]} & 1 & 0 \\ -\dfrac{[ac]}{[aa]} & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

得出结果为

$$\begin{bmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ 0 & [bb\cdot 1] & [bc\cdot 1] \\ 0 & [bc\cdot 1] & [cc\cdot 1] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [al] \\ [bl\cdot 1] \\ [cl\cdot 1] \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

第二次约化时系借用第二个约化方程对第三式消去 x_2，实际是对(4.3)式两边再左乘以

$$\boldsymbol{M}_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{[bc\cdot 1]}{[cc\cdot 1]} & 1 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

得出结果为

$$\begin{bmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ 0 & [bb\cdot 1] & [bc\cdot 1] \\ 0 & 0 & [cc\cdot 2] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [al] \\ [bl\cdot 1] \\ [cl\cdot 2] \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

(4.5)式就是约化法方程式的最后结果,它是由每次约化后的第一个式子构成。依相反的顺序经过回代过程即可求得各未知数的解。显然,当未知数的个数增多时,约化次数相应地增加。

如果把上述法方程系数阵 $\boldsymbol{N}$ 经初等变换的过程缩写成

$$\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{N} = \boldsymbol{U} \tag{4.6}$$

式中:$\boldsymbol{U}$ 为约化方程(4.5)式中的系数阵。那么,应有

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{M}_1^{-1}\boldsymbol{M}_2^{-1}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{LU} \tag{4.7}$$

可见,法方程的消元过程,在矩阵运算中是将法方程式系数矩阵 $\boldsymbol{N}$ 分解成为一个下三角矩阵 $\boldsymbol{L}$ 与一个上三角矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的乘积。也就是

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ [\frac{ab}{aa}] & 0 & 0 \\ [\frac{ac}{aa}] & [\frac{bc\cdot 1}{bb\cdot 1}] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ 0 & [bb\cdot 1] & [bc\cdot 1] \\ 0 & 0 & [cc\cdot 2] \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

对于一般的 n 阶法方程组 $\boldsymbol{NX}=\boldsymbol{B}$,按 $\boldsymbol{LU}$ 分解法可写成

$$\boldsymbol{LUX} = \boldsymbol{B} \tag{4.9}$$

若令

$$\boldsymbol{LY} = \boldsymbol{B} \tag{4.10}$$

则

$$\boldsymbol{UX} = \boldsymbol{Y} \tag{4.11}$$

这样,就将对法方程的求解问题转化成对(4.10)式及(4.11)式求解的问题。先由(4.10)式解出 $\boldsymbol{Y}$,再由(4.11)式解出 $\boldsymbol{X}$。

如果采用电子计算机计算,为编制程序的方便,可将(4.9)式中各矩阵中元素

视为

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

则上述约化过程可依次按 $k = 1,2,\cdots,(n-1)$ 计算

$$\left.\begin{aligned} & m_{ik} = \frac{a_{ki}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \\ & a_{ij}^{k} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik}a_{kj}^{(k-1)} \\ & b_i^{k} = b_i^{(k-1)} - m_{ik}b_k^{(k-1)} \\ & \begin{pmatrix} i = k+1, k+2, \cdots, n \\ j = i, i+1, \cdots, n \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

回代过程为

$$
\left.\begin{aligned}
x_n &= \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \\
x_i &= \frac{\left(b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j\right)}{a_{ii}^{(i-1)}} \\
(i &= n-1, \cdots, 2, 1)
\end{aligned}\right\} \tag{4.13}
$$

二、迭　代　法

迭代计算是一种间接解算法方程式的方法。这里只介绍两种简单的迭代法，即雅可比法和赛得尔法。为说明简单，仍使用3个未知数的法方程式为例。自然，在未知数数目增多时，迭代法才更显出其优越性。

1. 雅可比法

设有3个未知数的法方程式为

$$
\left.\begin{aligned}
[aa]x + [ab]y + [ac]z - [al] &= 0 \\
[ab]x + [bb]y + [bc]z - [bl] &= 0 \\
[ac]x + [bc]y + [cc]z - [cl] &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{4.14}
$$

首先，假定 x、y、z 的初始值(近似值)为 $x^{(k)}$、$y^{(k)}$、$z^{(k)}$。利用第一式计算 x 的下次近似值 $x^{(k+1)}$，使用的是 $y^{(k)}$、$z^{(k)}$；利用第二式计算 $y^{(k+1)}$，使用的是 $x^{(k)}$、$z^{(k)}$；依次类推，因此所运算的式子是

$$
\left.\begin{aligned}
[aa]x^{(k+1)} &= -[bb]y^{(k)} - [ac]z^{(k)} + [al] \\
[ab]y^{(k+1)} &= -[ab]x^{(k)} - [bc]z^{(k)} + [bl] \\
[cc]z^{(k+1)} &= -[ac]x^{(k)} - [bc]y^{(k)} + [cl]
\end{aligned}\right\} \tag{4.15}
$$

用矩阵表示时，设

$$
\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ [ab] & 0 & 0\\ [ac] & [bc] & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}[aa] & 0 & 0\\ 0 & [bb] & 0\\ 0 & 0 & [cc]\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & [ab] & [ac]\\ 0 & 0 & [bc]\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}
$$

$$
=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \tag{4.16}
$$

式中：$\boldsymbol{D}$ 为对角阵；$\boldsymbol{L}$ 为下三角矩阵，主对角线上的元素为 0。

则(4.15)式可写为

$$
\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}^{(k+1)}=-(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}^{(k)}+\boldsymbol{B}
$$

式中：

$$
\boldsymbol{X}=(x \quad y \quad z)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{B}=([al] \quad [bl] \quad [cl])^{\mathrm{T}} \tag{4.17}
$$

把本次迭代结果即未知数的近似值 $x^{(k+1)}$、$y^{(k+1)}$、$z^{(k+1)}$再代入到(4.15)式中，求算下一次迭代结果，周而复始直至 $\boldsymbol{X}^{(k+1)}$与 $\boldsymbol{X}^{(k)}$间差别小于某预先给定的数值时计算终止。

2. 赛得尔法

这种迭代方法的过程与上述方法相同，仅只是在代入各近似值时，凡是在上一公式中已求得的新近似值，立即引入到下一式的运算中，这不仅加速收敛，也节省存储单元。其运算公式可写为

$$
\left.\begin{aligned}
[ab]x^{(k+1)} &= \qquad\qquad\qquad\qquad -[ab]y^{(k)}-[ac]z^{(k)}+[al]\\
[bb]y^{(k+1)} &= -[ab]x^{(k+1)} \qquad\qquad\qquad -[bc]z^{(k)}+[bl]\\
[cc]z^{(k+1)} &= -[ac]x^{(k+1)}-[bc]y^{(k+1)} \qquad\qquad +[cl]
\end{aligned}\right\} \tag{4.18}
$$

用矩阵表示时，(4.18)式可写为

$$
\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}^{(k+1)}=-\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}^{(k+1)}-\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(k)}+\boldsymbol{B} \tag{4.19}
$$

或

$$(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})\boldsymbol{X}^{(k+1)}=-\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(k)}+\boldsymbol{B} \tag{4.20}$$

一般地讲，赛得尔法较雅可比法迭代收敛较快，因为赛得尔迭代及时地利用了新算出的趋近数值。但也指出，它并不是在任何情形下一定比雅可比法有利。

第二节　序贯观测与估计

在生产实践以及运用实验设计的时候，有时会出现这样的情况：额外地增加或减少了一个或多个观测值，甚至要全部重新观测。由于观测纲要或初始信息的变化，将使处理问题的结果或实验设计失去原有的平衡。如果将这种情况视为观测过程中的序贯性，那么如何确定估计量的序贯形式就是本节要讨论的内容。

由第三章第一节中所述可知，为了估计非随机向量 $\boldsymbol{X}$，取被零均值观测误差污染的线性观测，则有

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{V} \tag{4.21}$$

式中：$\boldsymbol{L}$ 为 n 维观测向量；$\boldsymbol{X}$ 为 t 维参数向量；$\boldsymbol{V}$ 为 n 维观测误差；$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times t$ 维信息矩阵。

根据参数的估计准则，估计量 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 应使二次式

$$\theta(\hat{\boldsymbol{X}})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{P}_L(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{X}})=\min \tag{4.22}$$

显然，使上式最小的估计量是最小二乘估计量，即有

$$\theta(\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{LS}})\leqslant\theta(\hat{\boldsymbol{X}})$$

由

$$\frac{\partial\theta}{\partial\hat{\boldsymbol{X}}}\Big|_{\hat{\boldsymbol{X}}=\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{LS}}}=0$$

即对(4.22)式求偏导数后，有

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_L(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{LS}})=\boldsymbol{0}$$

因此

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{LS} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_L\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_L\boldsymbol{L} \tag{4.23}$$

式中:$\boldsymbol{P}_L$ 为观测值的权阵。

如果相对于前面的(旧的)又得到一组关于 $\boldsymbol{X}$ 的新的观测,不妨称 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{N}}$。当然可以重复上面的计算,从而得到 $\hat{\boldsymbol{X}}_{LSN}$。如果用旧的计算来简化重复计算过程,这是可能的。实际上,这种假设相当于对待估参数赋予了随机性。将旧的观测及计算结果作为验前信息,使附加了新的观测之后的计算结果,较前一次计算出的参数估值仅附加修正。

如果将新旧观测放在一起并分别写成块阵形式,不难导出

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{S}} = (\boldsymbol{N}_{\mathrm{O}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}})^{-1}(\boldsymbol{B}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\mathrm{O}}\boldsymbol{L}_{\mathrm{O}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{L}_{\mathrm{N}}) \tag{4.24}$$

式中:$\boldsymbol{N}_{\mathrm{O}} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\mathrm{O}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{O}}$,各符号的下标 S、O、N 分别表示总和、旧的、新的。

考虑矩阵反演公式后,(4.24)式可写为

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{S}} = {} & [\boldsymbol{E} - \boldsymbol{N}_{\mathrm{O}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{O}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{P}_{\mathrm{N}}^{-1})^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}]\boldsymbol{N}_{\mathrm{O}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\mathrm{O}}\boldsymbol{L}_{\mathrm{O}} \\ & + \boldsymbol{N}_{\mathrm{O}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{P}_{\mathrm{N}} - (\boldsymbol{P}_{\mathrm{N}}^{-1} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{O}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{O}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\mathrm{N}}]\boldsymbol{L}_{\mathrm{N}}\end{aligned} \tag{4.25}$$

令

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{O}} &= \boldsymbol{N}_{\mathrm{O}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\mathrm{O}}\boldsymbol{L}_{\mathrm{O}} \\ \boldsymbol{K} &= \boldsymbol{N}_{\mathrm{O}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_{\mathrm{N}}^{-1} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{O}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}})^{-1}\end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

则(4.25)式可写为

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{S}} = \hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{O}} + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{L}_{\mathrm{N}} - \boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{O}}) \tag{4.27}$$

可见,上式中新的估值 $\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{S}}$ 是以旧的估值 $\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{O}}$ 加上依赖于新的观测 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{N}}$ 和期望观测 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{O}}$ 之间(或然)误差的修正而得到的。

有时,为了便于某种计算,例如评定点位精度或简化计算,这里不加证明地给出:

$$\boldsymbol{N}_{\mathrm{S}}^{-1} = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S}} = (\boldsymbol{B}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{S}})^{-1}$$

或

$$\boldsymbol{N}_S^{-1} = (\boldsymbol{N}_O + \boldsymbol{B}_N^T \boldsymbol{P}_N \boldsymbol{B}_N)^{-1} \tag{4.28}$$

也可

$$\boldsymbol{N}_S^{-1} = \boldsymbol{N}_O^{-1} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{B}_N \boldsymbol{N}_O^{-1}$$

显然,在(4.27)式与(4.28)式中,$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{L}_N - \boldsymbol{B}_N \hat{\boldsymbol{X}}_O)$和$-\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}_N \boldsymbol{N}_O^{-1}$分别表示的是坐标增益量和协因数增益量。

为了说明上述公式的用法,下面举例说明。

例[4.1]:设有两个线性观测

$$\boldsymbol{L}_O = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{X} + \boldsymbol{V}_O$$

与一个新的观测

$$\boldsymbol{L}_N = 4 = [1 \quad 2]\boldsymbol{X} + \boldsymbol{V}_N$$

这里,显然

$$\boldsymbol{B}_O = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_N = [1 \quad 2]$$

如果是同等精度观测,取 $\boldsymbol{P}_S = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_O & 0 \\ 0 & \boldsymbol{P}_N \end{bmatrix} = \boldsymbol{E}$

对于非序贯形式,可将新、旧观测合并在一起计算,则有

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_O \\ \boldsymbol{L}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_O \\ \boldsymbol{B}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

按间接观测处理解算法方程组，有

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{S}=(\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{L}$$

$$=\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\\frac{4}{3}\end{bmatrix}$$

由于法方程系数的逆阵就是未知数的协因数阵，因此有

$$\boldsymbol{Q}_{S}=(\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{B})^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

若运用序贯方法，先利用(4.26)式的一式，根据前两个观测计算，得

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{O}=(\boldsymbol{B}_{O}^{T}\boldsymbol{B}_{O})^{-1}\boldsymbol{B}_{O}^{T}\boldsymbol{L}_{O}$$

$$=\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{N}_{O}^{-1}=(\boldsymbol{B}_{O}^{T}\boldsymbol{B}_{O})^{-1}=\boldsymbol{Q}_{O}=\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

由于

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{N}_{O}^{-1}\boldsymbol{B}_{N}^{T}(\boldsymbol{P}_{N}^{-1}+\boldsymbol{B}_{N}\boldsymbol{N}_{O}^{-1}\boldsymbol{B}_{N}^{T})^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\left(1+\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

根据(4.27)式，可得

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{S}}=\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{O}}+\boldsymbol{K}(\boldsymbol{L}_{\mathrm{N}}-\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{O}})$$

$$=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}\left(4-\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\ \frac{4}{3}\end{bmatrix}$$

根据(4.28)式，可得

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{S}}=\boldsymbol{N}_{\mathrm{O}}^{-1}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{O}}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

显然，采用非序贯形式与序贯方法先后两种解算结果是相一致的。

应当指出，由非随机参数的非序贯估计开始，推导出的估计量的序贯形式，实际上不仅为处理参数为随机时求估值的一类问题，也可用于处理参数为非随机时求估值的一类问题。例如在控制测量时，对于建立真值实验网，旧网改造以及控制网的优化设计，特别是用于变形复测网方面，都有着重要的实用价值。

由公式(4.26)的第二式可知，当增加新的观测时，可为不同类观测量且也可为不等精度观测量，这对复测网或对某专用网局部强观测进行数据处理都是方便的。

若在足够的必要观测下，减少或丢失若干多余观测，此种情况视为序贯观测的逆过程。其处理仅仅是改变(4.27)式与(4.28)式中的相应运算符号即可。

当在计算机上进行序贯数据处理时，序贯求解形式无需存储已处理过的观测，特别是观测列维数很大时，这也是一个很重要的特点。

第三节　亏秩问题的处理

对测量控制网进行数据处理时，还可能遇到数学模型中的设计矩阵是奇异的

情况。其所以如此，主要是由数亏，即控制网中的所有点的坐标都视为未知数，缺少用于定位的起算数据而引起的；另一方面是由形亏，即缺少确定一个控制网所必须的观测值，也就是观测的个数不足而引起的。此外，若引入相关条件时，也产生亏秩情况。这里，若以间接观测为例，各种不同类型的控制网亏秩数，一般地应为相应网必要起算数据的个数。若以 d 表示亏秩数，则有

$$d=\begin{cases}1 & \text{水准网，测站平差}\\ 3 & \text{二维测边网，边角网及导线网}\\ 4 & \text{二维测角网}\\ 6 & \text{三维测边网}\\ 7 & \text{三维测角网}\end{cases}$$

根据线性代数理论，当设计矩阵为奇异阵时，表明其列(或行)不满秩，由其所构成的法方程的系数阵也是奇异的，即 $\det \boldsymbol{N}=0$。也就是说，没有 Cayley 逆存在。目前，解算这类问题的方法很多，主要以广义逆理论为基础。为避开求广义逆或特征值等复杂的数学方法，下面介绍用分极小法解算亏秩网的方法。

一、原　　理

设有误差方程

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{l}\qquad \text{权 } \boldsymbol{P} \tag{4.29}$$

式中：$\boldsymbol{V}$ 为 n 维改正数向量；$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times t$ 维设计矩阵($\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})<t$)；$\boldsymbol{X}$ 为 t 维未知数向量；$\boldsymbol{l}$ 为 n 维常项向量。

若令

$$\underset{n\times t}{\boldsymbol{A}}=[\underset{n\times t_1}{\boldsymbol{A}_1}\quad \underset{n\times t_2}{\boldsymbol{A}_2}],\qquad \underset{t\times 1}{\boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix}\underset{t_1\times 1}{\boldsymbol{X}_1}\\ \underset{t_2\times 2}{\boldsymbol{X}_2}\end{bmatrix}$$

式中：$t_1+t_2=t$；$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}_1)=t_1=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$；$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}_2)=t-t_1$。

显然，(4.29)式可写为

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{l} = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{l}_1 \tag{4.30}$$

式中：$\boldsymbol{l}_1 = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{l}$。如果已知 $\boldsymbol{X}_2$，则(4.30)式即为经典的误差方程。

以 $\boldsymbol{X}_1$ 为未知数，使 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PV}$ 为极少，按间接观测处理对(4.30)式求导，得法方程为

$$\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA}_1\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}_2) \tag{4.31}$$

根据对含有自由变量方程组的解法，得

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{X}_1 &= (\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA}_1)^{-1}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}_2) \\ &= -(\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA}_1)^{-1}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA}_2\boldsymbol{X}_2 + (\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA}_1)^{-1}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{X}_2 &= \boldsymbol{X}_2 \end{aligned}\right\} \tag{4.32}$$

可见(4.32)式具有无穷组解。

为了求得惟一的一组解，可将(4.32)式再视为 t 个观测方程，以 $\boldsymbol{X}_2$ 为未知数进行间接观测处理，即求未知数的最小范数解，使

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_X\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{X_1}\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{X_2}\boldsymbol{X}_2 = \min$$

式中：

$$\boldsymbol{P}_X = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{X_1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{P}_{X_2} \end{bmatrix}$$

将 $\boldsymbol{X}_1$ 视为 $\boldsymbol{X}_2$ 的函数并对 $\boldsymbol{X}_2$ 求导，化简，得

$$-\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA}_1(\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA}_1)^{-1}\boldsymbol{P}_{X_1}\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{P}_{X_2}\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{0} \tag{4.33}$$

将(4.32)式中的第一式代入上式，并令

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{N}_{11} \qquad & \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{N}_{12} \\ \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{N}_{21} \qquad & \end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

则(4.33)式可写为

$$(\boldsymbol{N}_{21}\boldsymbol{N}_{11}^{-1}\boldsymbol{P}_{X_1}\boldsymbol{N}_{11}^{-1}\boldsymbol{N}_{12} + \boldsymbol{P}_{X_2})\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{N}_{21}\boldsymbol{N}_{11}^{-1}\boldsymbol{P}_{X_1}\boldsymbol{N}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{0}$$

解

$$\boldsymbol{X}_2 = (\boldsymbol{N}_{21}\boldsymbol{N}_{11}^{-1}\boldsymbol{P}_{X_1}\boldsymbol{N}_{11}^{-1}\boldsymbol{N}_{12} + \boldsymbol{P}_{X_2})^{-1}\boldsymbol{N}_{21}\boldsymbol{N}_{11}^{-1}\boldsymbol{P}_{X_1}\boldsymbol{N}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l} \tag{4.35}$$

按矩阵反演公式,有

$$\begin{aligned} & (\boldsymbol{N}_{21}(\boldsymbol{N}_{11}\boldsymbol{P}_{X_1}^{-1}\boldsymbol{N}_{11})^{-1}\boldsymbol{N}_{12} + \boldsymbol{P}_{X_2})^{-1}\boldsymbol{N}_{21}(\boldsymbol{N}_{11}\boldsymbol{P}_{X_1}^{-1}\boldsymbol{N}_{11})^{-1} \\ & = \boldsymbol{P}_{X_2}^{-1}\boldsymbol{N}_{21}(\boldsymbol{N}_{11}\boldsymbol{P}_{X_1}^{-1}\boldsymbol{N}_{11} + \boldsymbol{N}_{12}\boldsymbol{P}_{X_2}^{-1}\boldsymbol{N}_{21})^{-1} \\ & = \boldsymbol{P}_{X_2}^{-1}\boldsymbol{N}_{21}\boldsymbol{R}^{-1} \end{aligned} \tag{4.36}$$

式中:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{N}_{11}\boldsymbol{P}_{X_1}^{-1}\boldsymbol{N}_{11} + \boldsymbol{N}_{12}\boldsymbol{P}_{X_2}^{-1}\boldsymbol{N}_{21}$$

于是

$$\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{P}_{X_2}^{-1}\boldsymbol{N}_{21}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l} \tag{4.37}$$

这就是 $\boldsymbol{X}_2$ 的最优解。

将(4.37)式代入(4.32)式中的第一式,得

$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{P}_{X_1}^{-1}\boldsymbol{N}_{11}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l} \tag{4.38}$$

这就是 $\boldsymbol{X}_1$ 的最优解。合并(4.37)式与(4.38)式两式,可写为

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}_X^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l} \tag{4.39}$$

利用协因数传播律,可写出未知数的权逆阵为

$$Q_{XX} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = P_X^{-1} A^{T} P A_1 R^{-1} A_1^{T} P A_1 R^{-1} A_1^{T} P A P_X^{-1} \qquad (4.40)$$

展开上式后,得

$$\left.\begin{aligned} Q_{11} &= P_{X_1}^{-1} N_{11} R^{-1} N_{11} R^{-1} N_{11} P_{X_1}^{-1} \\ Q_{22} &= P_{X_2}^{-1} N_{21} R^{-1} N_{11} R^{-1} N_{12} P_{X_2}^{-1} \\ Q_{12} &= Q_{21}^{T} = P_{X_1}^{-1} N_{11} R^{-1} N_{11} R^{-1} N_{12} P_{X_2}^{-1} \end{aligned}\right\} \qquad (4.41)$$

当为等权观测时,上述各式相应地更为简单,例如

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= A_1^{T} A_1 (A_1^{T} A_1 A_1^{T} A_1 + A_1^{T} A_2 A_2^{T} A_1)^{-1} A_1^{T} l = \alpha l \\ X_2 &= A_2^{T} A_1 (A_1^{T} A_1 A_1^{T} A_1 + A_1^{T} A_2 A_2^{T} A_1)^{-1} A_1^{T} l = \beta l \end{aligned}\right\}$$

及

$$\left.\begin{aligned} Q_{X_{11}} &= \alpha \alpha^{T} \\ Q_{X_{22}} &= \beta \beta^{T} \\ Q_{X_{12}} &= \alpha \beta^{T} \end{aligned}\right\} \qquad (4.42)$$

式中:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= A_1^{T} A_1 (A_1^{T} A_1 A_1^{T} A_1 + A_1^{T} A_2 A_2^{T} A_1)^{-1} A_1^{T} \\ \beta &= A_2^{T} A_1 (A_1^{T} A_1 A_1^{T} A_1 + A_1^{T} A_2 A_2^{T} A_1)^{-1} A_1^{T} \end{aligned}\right\} \qquad (4.43)$$

二、算　　例

例[4.2]:为说明上述公式计算的步骤和方法,以一水准网(图 4.1)为例。各路线观测高差和各点近似高程均列于表 4.1 中,并设网中各路线长度相等,即各观测值的权为 1。

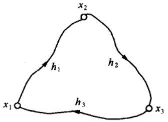


图 4.1

表 4.1

点 号	观测高差	近似高程
1		0
	12.345	
2		12.345
	3.478	
3		15.823
	−15.817	
1		

列误差方程

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{l}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

由于

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = 2 < t$$

则将 $\boldsymbol{A}$ 阵分块为

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\boldsymbol{A}_1) = 2 = \text{rank}(\boldsymbol{A}), \quad \text{rank}(\boldsymbol{A}_2) = t - 2 = 1$$

计算

$$\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}^{-1} = (\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{3}[0 \quad 1 \quad -1]$$

于是

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{\alpha l} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{\beta l} = -2$$

各点平差后的高程为

$$H_1 = 0.002, \quad H_2 = 12.345, \quad H_3 = 15.821$$

未知数的协因数阵

$$Q_{X_{11}} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad Q_{X_{22}} = \frac{1}{9} \times 2, \qquad Q_{X_{12}} = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此

$$Q_{XX} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

综上所述,利用分极小法处理亏秩问题,一般是先设定未知数的近似值作为初值。之后,先使观测值的改正数的平方和为极小,得法方程组。由于法方程的系数阵也是奇异的,再使未知数的平方和为极小,最后求出极小最小二乘解。

顺便指出,与分极小法相应的还有合极小法。这种方法是直接把未知数 $\boldsymbol{X}$ 作为观测值看待,即有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{V} &= \boldsymbol{AX} - \boldsymbol{l} \qquad \text{权 } \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{V}_X &= \boldsymbol{X} \qquad\qquad \text{权 } \boldsymbol{P}_X \end{aligned}\right\} \tag{4.44}$$

使

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PV} + \boldsymbol{V}_X^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_X\boldsymbol{V}_X = \min$$

式中:$\boldsymbol{P}_X$ 为赋予初始值 $\boldsymbol{X}^0$ 的权,由此得法方程组为

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA} + \boldsymbol{P}_X)\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Pl} = \boldsymbol{0} \tag{4.45}$$

由于

$$|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA} + \boldsymbol{P}_X)| \neq 0$$

则

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA} + \boldsymbol{P}_X)^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Pl} \tag{4.46}$$

且 $\boldsymbol{X}$ 的权阵、权逆阵和方差阵分别为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{N} &= \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{P}_X \\ \boldsymbol{Q}_X &= \boldsymbol{N}^{-1} \\ \boldsymbol{D}_X &= \sigma_0^2 \boldsymbol{Q}_X \end{aligned}\right\} \tag{4.47}$$

残差平方和为

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}_X^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_X\boldsymbol{V}_X$$

单位权方差为

$$\sigma_0^2 = \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{n + t - t} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{n} \tag{4.48}$$

式中：n 为观测数；t 为未知数个数。

可见，合极小法的计算工作量比较小。

最后说明，由于亏秩网经处理后各点位置精度较为均匀，目前多试用于变形监测网中。有文献说明，地面亏秩网也具有一定的局限性。由于未知数的初值选取不当，产生的同向误差不会被发现并得不到改正。为了获取最好的初始值，应先利用观测资料按经典方法对控制网进行处理，得出坐标差或高差的估值，再利用外部资料确定出尽可能好的必要起始数据。进一步求各点的坐标或高程，然后以此为初始值，对亏秩网进行数据处理。

第四节　误差椭圆

在对平面控制网的优化设计或精度分析时，只求出点位误差的大小还不够，有时需知道点位的最大与最小误差及其所在方向，某些工程专用网还要求知道某点对另一点的相对误差及大小。因此，对这些精度要素的讨论是很有必要的。

一、任意方向上的点位误差

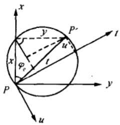


图 4.2

如图 4.2 所示，若 P 为某点的真实位置，P' 为观测位置，则 PP' 为 P 点的点位真误差(或称真位差)。

若以 PP' 为直径作圆 O，则圆上任意一点处相对于直径的

圆周角都相等(90°)。如果将角的两边视作 PP' 经直交分解的两个分量,且两边所处的方向与坐标轴同向,显而易见,任意两个垂直方向上的位差平方和都等于真误差 PP' 的平方。所谓 P 在某一方向上的点位误差,就是指 PP' 在该方向上的投影值。考虑到真误差与方差之间的关系,也可以说,任意两个互相垂直方向上的中误差的平方和都等于点位中误差的平方。换句话说,待定点的点位误差与所选坐标系无关。因此

$$\left.\begin{aligned} &{m_x}^2 + {m_y}^2 = m_t^2 + m_u^2 = M_P^2 \\ \text{或}\quad &D_{xx} + D_{yy} = D_{tt} + D_{uu} = {M_P}^2 \end{aligned}\right\} \tag{4.49}$$

二、位差的极值与其位置

由图 4.2 中可见,沿着圆周上的点对真位差 PP' 进行直交分解的两个分量通常并非相等,其中的一个分量若取最大值,则另一个分量相应地将取最小值。因此,真位差 PP' 沿不同方向的直交分解将产生极值。其极值的大小可利用 P 点的方差阵所构成的特征多项式(关于特征根 λ 的首项系数为 1 的降秩多项式)求解,则有

$$|\boldsymbol{D} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} D_{xx} - \lambda & D_{xy} \\ D_{xy} & D_{yy} - \lambda \end{vmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.50}$$

$$(\lambda - D_{xx})(\lambda - D_{yy}) - {D_{xy}}^2 = \mathbf{0}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(D_{xx} + D_{yy} \pm K) \tag{4.51}$$

式中:

$$K = \sqrt{(D_{xx} - D_{yy})^2 + 4{D_{xy}}^2} \tag{4.52}$$

如果令 $\lambda_1 = E^2, \lambda_2 = F^2$,则 E, F 分别为 P 点位差的极大值与极小差。根据空间解析

几何理论可知,这里的极值$\sqrt{\lambda_i}(i=1,2)$的几何意义表示的是椭圆的长、短半轴。

欲求极值所处的位置(即与 X 轴正向所夹角度 φ),也就是求特征根 $\lambda_i(i=1,2)$对应的特征向量所在的方向。根据特征方程

$$[\boldsymbol{D}-\lambda\boldsymbol{E}]\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0 \tag{4.53}$$

式中:$[x\quad y]^{\mathrm{T}}$是与 λ 对应的特征向量,其分量 x 和 y 分别是纵、横坐标轴上的单位长度(坐标基)。则(4.53)式又可写为

$$\begin{bmatrix}D_{xx}-\lambda_1 & D_{xy}\\ D_{xy} & D_{yy}-\lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0 \tag{4.54}$$

$$\left.\begin{aligned}(D_{xx}-\lambda_1)x+D_{xy}y&=0\\ D_{xy}x+(D_{yy}-\lambda_1)y&=0\end{aligned}\right\} \tag{4.55}$$

由此,可解得具有位差极大值的方向 φ_E 为

$$\tan\varphi_E=\frac{y}{x}=\frac{\lambda_1-D_{xx}}{D_{xy}}=\frac{D_{xy}}{\lambda_1-D_{yy}} \tag{4.56}$$

由于 $D_{xx}\leqslant\lambda_1$,所以$\tan\varphi_E$(是取正还是取负)始终与 D_{xy}同号。

类似地,具有位差极小值的方向φ_F为

$$\tan\varphi_F=\frac{y}{x}=\frac{\lambda_2-D_{xx}}{D_{xy}}=\frac{D_{xy}}{\lambda_2-D_{yy}} \tag{4.57}$$

也可以由

$$\tan\varphi_{E,F}=\frac{-1\pm\sqrt{\mu^2+1}}{\mu}$$

解得$\varphi_{E,F}$。

式中:$\mu=\dfrac{2D_{xy}}{D_{xx}-D_{yy}}$,这里证明从略。

由于极值所处的两个方向φ_E和φ_F总是相互垂直的，所以$\varphi_E = \varphi_F + 90°$

三、以极值 E、F 表示的任意角度ψ的r方向上的位差

前面推导的计算极值以及极值所处方向的公式，都是在X、Y坐标系中来表述的。如果要求E、F坐标系中任意方向(即与E轴正向所夹ψ角的r方向)上的点位位差，根据转轴公式，真误差的分量之间应有

$$r = E\cos\psi + F\sin\psi \tag{4.58}$$

根据方差-协方差传播律，直接可得

$$D_{rr} = D_{EE}\cos^2\psi + D_{FF}\sin^2\psi \tag{4.59}$$

该式就是以E、F表示的，以极大轴E的正向为起始方向且与之成任意角度ψ的r方向上的点位方差的计算公式。其中：$D_{EE} = E^2$；$D_{FF} = F^2$。

四、误差曲线与误差椭圆的特性

由公式(4.58)可知，$\sigma_r (= \sqrt{D_{rr}})$的大小是随角度ψ而变化的，$\sigma_r$的端点轨迹是一条关于两个极轴对称的封闭的曲线。人们常称它为误差曲线。可见，误差曲线的定义是：以待定点P为极，ψ为极角，σ_r为长度的极坐标点的轨迹，如图4.3所示。

由于误差曲线形象地反映了P点在各个不同方向上的位差，因此也称其为精

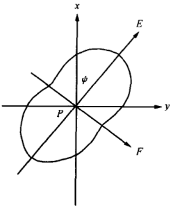


图 4.3

度曲线。但是,对它的绘制是件麻烦的事情。为方便绘制及其应用,这里不加证明地给出,通常的作法是:将 E、F 视为长、短半轴,先绘出误差椭圆,再根据误差椭圆的特性;将误差椭圆向 r 轴投影,其投影长度即为该方向上的点位中误差 σ_{r_i}。使 ψ 角由 0°~360°变化,各垂足的连线一定是一条对称的封闭曲线(图 4.4),该曲线即为所求。

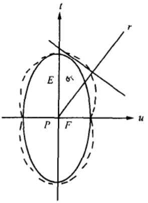


图 4.4

在特殊情况下,如果某点的相关协方差等于零,则

$$2\psi = \arctan \frac{0}{D_{xx} - D_{yy}} = 0°(\text{或 } 180°)$$

说明椭圆的长、短半轴恰与纵、横坐标轴相重合。此时 σ_x 与 σ_y 就是一对极值方向上的位差。

如果 $D_{xx} - D_{yy}$ 也等于零,则说明极值方向不定。此时椭圆变为圆,常称此圆为误差圆。由于圆在各方向上的投影都等于半径,所以误差圆也就是误差曲线。

五、相对误差椭圆

前面讲述的误差椭圆估计地是待定点相对于已知点的绝对位置的精度;在工程专用网中,有时还要估计某两个待定点之间的相对位置的精度。这时,若用相对误差椭圆来描述是比较全面和直观的。

如图 4.5 所示,设 P_i、P_j 两点的真位差分别为 P_iP_i' 及 P_jP_j',在 X 轴与 Y 轴上的分量分别为 x_i、y_i 及 x_j、y_j。从图 4.5 中不难看出,这两点的相对真位差为 $P_i''P_j'$。显然,它在 X、Y 轴上的分量分别为 $(x_j - x_i)$ 及 $(y_j - y_i)$。

仿上述误差椭圆的推证,也不难得到相对误差椭圆的三元素。其中极轴为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(D_{\Delta x\Delta x} + D_{\Delta y\Delta y} \pm K) \tag{4.60}$$

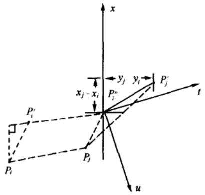


图 4.5

式中：

$$K = \sqrt{(D_{\Delta x\Delta x} - D_{\Delta y\Delta y})^2 + 4D_{\Delta x\Delta y}^2} \tag{4.61}$$

极角(极值所处的方向)为

$$\tan\varphi_E = \frac{\Delta y_{ij}}{\Delta x_{ij}} = \frac{\lambda_1 - D_{\Delta x\Delta x}}{D_{\Delta x\Delta y}} = \frac{D_{\Delta x\Delta y}}{\lambda_1 - D_{\Delta y\Delta y}} \tag{4.62}$$

同样地，$\tan\varphi_E$(是取正还是取负)始终与 $D_{\Delta x\Delta y}$同号。其他结论也都与误差椭圆相类似，在此省略。

最后指出，相对误差椭圆有关公式中的

$$\left.\begin{aligned} D_{\Delta x\Delta x} &= D_{x_ix_i} + D_{x_jx_j} - 2D_{x_ix_j} \\ D_{\Delta y\Delta y} &= D_{y_iy_i} + D_{y_jy_j} - 2D_{y_iy_j} \\ D_{\Delta x\Delta y} &= D_{x_iy_i} + D_{x_jy_j} - D_{x_iy_j} - D_{x_jy_i} \end{aligned}\right\} \tag{4.63}$$

由于方差与协因数之间有关系式为 $D = \sigma_0{}^2 Q$，所以本节中凡是与方差 D 有关的

公式均可以用协因数 Q 表示，在此不再赘述。

[例 4.3]：已知单位权中误差 $\sigma_0=1\times10^{-3}$m，$P_1(x_1,y_1)$与 $P_2(x_2,y_2)$两点坐标的协因数阵为 $\boldsymbol{Q}$，考虑到方差与协因数的关系式，则

$$\boldsymbol{D}=\sigma_0^2\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} D_{1x1x} & D_{1x1y} & D_{1x2x} & D_{1x2y} \\ D_{1y1x} & D_{1y1y} & D_{1y2x} & D_{1y2y} \\ D_{2x1x} & D_{2x1y} & D_{2x2x} & D_{2x2y} \\ D_{2y1x} & D_{2y1y} & D_{2y2x} & D_{2y2y} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4.494 & -2.082 & -0.952 & -1.553 \\ & 3.806 & 2.531 & 2.931 \\ \text{对} & & 7.121 & 3.332 \\ & \text{称} & & 3.784 \end{bmatrix}$$

(1)求 P_1 点的绝对误差椭圆元素

由

$$K=\sqrt{(D_{xx}-D_{yy})^2+4D_{xy}^2}=\sqrt{(4.494-3.806)^2+4(-2.082)^2}$$

$$=4.220$$

代入公式

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}(D_{xx}+D_{yy}\pm K)$$

得

$$\lambda_1=6.260,\qquad \lambda_2=2.040$$

所以

$$长半轴 \quad E = 2.502$$

$$短半轴 \quad F = 1.428$$

由公式

$$\tan\varphi_E = \frac{\lambda_1 - D_{xx}}{D_{xy}} = \frac{6.260 - 4.494}{-2.082}$$

计算可得极角

$$\varphi_E = 319°41'40''.7(以及\ \varphi_E - 180° = 139°41'40''.7)$$

(2)求 P_1 与 P_2 两点之间的相对误差椭圆元素

根据公式(4.63)计算,得

$$D_{\Delta x\Delta x} = 4.494 + 7.121 - 2\times(-0.952) = 13.519$$

$$D_{\Delta y\Delta y} = 3.806 + 3.784 - 2\times 2.931 = 1.728$$

$$D_{\Delta x\Delta y} = -2.802 + 3.332 - (-1.553) - 2.531 = 0.272$$

代入公式(4.61)计算,得

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{(13.519 - 1.728)^2 + 4\times 0.272^2} \\ &= 11.804 \end{aligned}$$

再代入公式(4.60)计算,得

$$\lambda_1 = 13.526, \qquad \lambda_2 = 1.722$$

因此,相对误差椭圆的长、短半轴分别为

$$E = 3.678$$

$$F = 1.312$$

由公式(4.62)计算,得极角为

$$\varphi_E = 1°28'27''.1(以及\ 181°28'27''.1)$$

(3)误差椭圆的应用

根据以上数据可以绘出 P_1、P_2 点的绝对误差椭圆以及 P_1、P_2 两点间的相对误差椭圆。前者是以 P_i 点的点位为中心,后者一般是画在两点连线的中间部分(图 4.6 所示的 O 点处)。

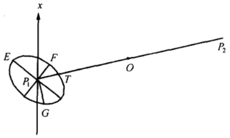


图 4.6

首先是以长、短半轴 E、F 和极角 φ_E 为参数绘出误差椭圆(作为例子,仅为说明误差椭圆的应用,这里只绘出了 P_1 点处的绝对误差椭圆)。用图解法在所绘椭圆上可以量取需要的任意方向上的位差大小。例如,欲求定 P_1P_2 边长的精度 $m_{s_{P_1P_2}}$,只需在 P_1P_2 方向上量取 P_1T 的大小即为所求,也就是

$$m_{s_{P_1P_2}} = \overline{P_1T}$$

如果是求任意边 P_1P_2 方位的精度,只需作 P_1P_2 边的垂线 P_1G 交椭圆于 G,量取 P_1G 的大小,则有

$$m_{\alpha_{P_1P_2}} = \frac{\overline{P_1G}}{S_{P_1P_2}}\rho''$$

顺便指出,误差椭圆的理论和实践,不仅常被应用于精度要求较高的各种工程测量中,近年来有人将其应用在图像检测和模式识别的实践中,也取得了令人满意的效

果，在此就不再赘述了。

第五节　置信椭圆

为了直观地描述点位或平差值函数的精度，常常是利用误差椭圆或相对误差椭圆这一几何表示法。根据数理统计学的观点，数据处理的过程是对所求量期望值的估计过程。为反映估计值与期望值之间的差异，往往还要对估计结果的置信度予以说明。置信椭圆所研究的是：在二维空间中，一组线性估值的椭圆形置信区域。

根据区间估计理论，有

$$P\{\Phi \in B\} = 1 - \alpha \tag{4.64}$$

式中：Φ 表示某一随机变量或其函数；B 为置信区域；$1-\alpha$ 为给定的某一置信度。

根据数据处理及各种量的分布理论可知，函数

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{AX}$$

的最优估值为

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_{\hat{x}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l} \tag{4.65}$$

可见

$$\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{Q}_{\hat{x}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l} \tag{4.66}$$

式中：

$$\boldsymbol{Q}_{\hat{x}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA})^{-1} \tag{4.67}$$

残差：

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{l} = -(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_{\hat{x}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{l} \tag{4.68}$$

其中：$\boldsymbol{E}$ 为单位阵。

由(4.66)、(4.68)两式可知，$\hat{\boldsymbol{X}}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 是观测值 $\boldsymbol{l}$ 的函数。由于随机向量 $\boldsymbol{l} \sim N(\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{D}_l)$，因此，$\hat{\boldsymbol{X}}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 也都服从正态分布，且统计量

$$\chi_{n-t}^2 = \frac{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}}{\sigma^2} \tag{4.69}$$

是具有自由度为 $n-t$ 的 χ^2 分布。其中：n 为观测数；t 为未知参数的个数；σ^2 为单位权母体方差 。

统计量

$$\left.\begin{aligned}
\chi_n^2 &= \frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}) \\
&\text{或} \\
\chi_n^2 &= \frac{1}{\sigma^2}(\hat{\boldsymbol{L}} - \boldsymbol{L})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_L^{-1}(\hat{\boldsymbol{L}} - \boldsymbol{L}) \\
&= (\hat{\boldsymbol{L}} - \boldsymbol{L})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_L^{-1}(\hat{\boldsymbol{L}} - \boldsymbol{L})
\end{aligned}\right\} \tag{4.70}$$

是具有 n 个自由度的 χ^2 分布。式中

$$\boldsymbol{D}_L = \sigma^2\boldsymbol{Q}_L$$

表示期望值的方差阵。

如果单位权母体方差 σ^2 未知，而其单位权估值方差 $\hat{\sigma}^2$ 已知时，与(4.70)式相对应，有

$$\chi_n^2 = (\hat{\boldsymbol{L}} - \boldsymbol{L})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{\hat{L}}^{-1}(\hat{\boldsymbol{L}} - \boldsymbol{L}) \tag{4.71}$$

式中：$\boldsymbol{D}_{\hat{L}}$ 为估值方差。

如果单位权母体方差 σ^2 已知，相对于(4.70)式转换为 T 维未知坐标向量，同理有

$$\chi_T^2 = (\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_X^{-1} (\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}) \tag{4.72}$$

如果单位权估值方差 $\hat{\sigma}^2$ 已知，还可以构成统计量 F，即

$$\left.\begin{aligned} F_{T,n-t} &= \frac{\chi_T^2/T}{\chi_{n-t}^2/(n-t)} = \frac{(\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_X^{-1} (\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X})/T}{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{V}/(n-t)} \\ &\text{或} \\ F_{T,n-t} &= \frac{(\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_X^{-1} (\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X})}{T \cdot \hat{\sigma}^2} \end{aligned}\right\} \tag{4.73}$$

至此，如果把统计量 χ_T^2 与 $F_{T,n-t}$ 视为(4.64)式中的 $\boldsymbol{\Phi}$，那么，当 σ 已知时，有

$$P\{\chi_T^2 \leqslant \chi_{T;1-\alpha}^2\} = 1 - \alpha$$

也就是

$$P\{(\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_X^{-1} (\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}) \leqslant \sigma^2 \cdot \chi_{T;1-\alpha}^2\} = 1 - \alpha \tag{4.74}$$

当 $\hat{\sigma}$ 已知时，有

$$P\{F_{T,n-t} \leqslant F_{T,n-t;1-\alpha}\} = 1 - \alpha$$

也就是

$$P\{(\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_X^{-1} (\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}) \leqslant T \cdot \hat{\sigma}^2 F_{T,n-t;1-\alpha}\} = 1 - \alpha \tag{4.75}$$

上面两式中，$\chi^2_{T;1-\alpha}$与$F_{T,n-t;1-\alpha}$是在置信水平为$1-\alpha$下的临界值，可在χ^2与F分布表中查取。

根据空间解析几何引论，若把上述式中的$\hat{\boldsymbol{X}}$与$\boldsymbol{X}$视为中心为$\boldsymbol{X}$的坐标向量，(4.74)式与(4.75)式中的左边大括号里的等式表示一个T维超椭球。如果取$T=2$，显然，(4.74)式与(4.75)式确定了$\boldsymbol{X}$的两个椭圆形区域。若取极限域，即以等号代替小于号，那么有公式

$$(\hat{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_X{}^{-1}(\hat{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{X})=\sigma^2\cdot\chi^2{}_{2;1-\alpha} \tag{4.76}$$

与

$$(\hat{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_X{}^{-1}(\hat{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{X})=2\hat{\sigma}^2\cdot F_{2,n-t;1-\alpha} \tag{4.77}$$

分别表示了在σ已知或$\hat{\sigma}$已知时的两个置信椭圆。其半轴为

$$A_i=\sigma\sqrt{\lambda_i\cdot\chi^2{}_{2;1-\alpha}} \tag{4.78}$$

或

$$A_i=\hat{\sigma}\sqrt{2\lambda_i\cdot F_{2,n-t;1-\alpha}} \tag{4.79}$$

式中：λ_i为$\boldsymbol{Q}_X$阵的特征根；$i(=1,2)$表示长短二轴。

可以证明，置信椭圆的半轴与椭圆的半轴之比仅差一个因子。后者为

$$A_{(H)_i}=\sigma(\text{或}\ \hat{\sigma})\sqrt{\lambda_i} \tag{4.80}$$

两椭圆半径之比值为

$$\frac{A_i}{A_{(H)_i}}=\sqrt{\chi^2_{2;1-\alpha}} \tag{4.81}$$

或

$$\frac{A_i}{A_{(H)_i}}=\sqrt{2F_{2,n-t;1-\alpha}} \tag{4.82}$$

可见,误差椭圆的半轴乘以因子$\sqrt{\chi^2_{2;1-\alpha}}$或$\sqrt{2F_{2,n-t;1-\alpha}}$后,即为置信椭圆的半轴。

不难理解,如果将误差椭圆也视为是置信椭圆,那么

$$\chi^2{}_{2;1-\alpha}=1 \tag{4.83}$$

或

$$F_{2,n-t;1-\alpha}=0.5 \tag{4.84}$$

于是,可以根据不同的自由度,求出临界值为1或0.5时的置信水平$1-\alpha$的大小。

最后指出,置信椭圆的概念多用于变形复测网点的统计检验中。由于多数情况下,σ是未知的,而$\hat{\sigma}$是可求的。因此,统计量$F_{2,n-t}$的应用价值相当大。如果它是由经典的间接观测结果而构造的统计量(或称检验值),它属于中心的F分布;如果它是由亏秩网观测结果而构造的,它具有非中心的F分布。只有当接受线性假设(指附有的条件)的情况下,它才属中心的F分布。

在变形网点统计检验中,若将置信椭圆连同变形向量(指对同一公共点两周期观测,经数据处理后的坐标差)用图解表示,此时可由P_i^1点(i代表某一点号,1,2表示观测周期号)起,量取变形向量

$$\boldsymbol{d}_i=\begin{bmatrix}x_i^1-x_i^2\\ \\ y_i^1-y_i^2\end{bmatrix}$$

并在P_i^2点处用箭头表示,其尖端处用作置信椭圆中心。若P_i^1点在椭圆形置信域之外,则舍弃原假设H_0(例如,认为相应点两周期间未产生移动),说明备择假设H_A(例如,认为相应点两周期间产生移动)成立。反之,若P_i^1点被包围在椭圆形置信区域内,则接纳原假设H_0,说明备择假设H_A不成立。可见,用置信椭圆描述控制网点的变形是相当直观的。

思考题与习题

1.设有等精度观测的条件方程式为

$$
\begin{cases}
v_1 - v_2 + v_3 + 2 = 0 \\
v_3 + v_4 + v_7 + 1 = 0 \\
v_2 + v_5 + v_6 + v_7 - 1 = 0
\end{cases}
$$

求解该方程组。

2. 设有误差方程组为

$$
\left.
\begin{aligned}
v_1 &= \delta x_1 + 3 \\
v_2 &= \delta x_1 \\
v_3 &= -\delta x_1 + \delta x_3 - 1 \\
v_4 &= -\delta x_3 \\
v_5 &= \delta x_2 - \delta x_3 + 2 \\
v_6 &= -\delta x_1 + \delta x_2 - 5 \\
v_7 &= \delta x_2
\end{aligned}
\right\},\quad \text{权阵 } \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2 & & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 2 \end{bmatrix}
$$

试求解未知数 $\delta\mathbf{X}$ 以及改正数 $\mathbf{V}$,并计算单位权中误差 m_0 以及各未知数的精度。

3. 设有两组等精度观测的方程,分别为

$$
\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 - \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 - \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix}
$$

试按序贯观测与估计的方法求 $\boldsymbol{X} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^{\mathrm{T}}$ 以及 $\boldsymbol{Q}_x$。

4. 如图 4.7 所示水准网,A 为已知点,$H_A = 20.000\text{m}$,第一次观测了 $h_1 \sim h_6$,第二次观测了 $h_7 \sim h_9$,假定各段路线长度相等,观测高差分别为(单位 m)

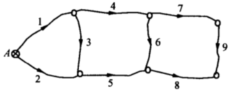


图 4.7

$$\text{Ⅰ:}\quad h_1 = 1.545 \qquad h_2 = 5.506 \qquad h_3 = 3.955$$
$$h_4 = 3.455 \qquad h_5 = -7.510 \qquad h_6 = -7.000$$

$$\text{Ⅱ:}\quad h_7 = 15.450 \qquad h_8 = -8.000 \qquad h_9 = -30.465$$

各点高程的近似值取(均以 m 为单位):

$x^\circ_1 = 21.545$, $x^\circ_2 = 25.500$, $x^\circ_3 = 25.000$, $x^\circ_4 = 18.000$, $x^\circ_5 = 40.450$, $x^\circ_6 = 10.000$。

试按序贯观测处理,求定各点高程的估值及其协因数。

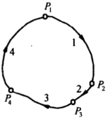


图 4.8

5. 如图 4.8 所示水准网,各路线观测高差及路线长度分别为

$h_1 = 0.505\text{m}$, $s_1 = 4\text{km}$; $h_2 = 4.010\text{m}$, $s_2 = 1\text{km}$; $h_3 = -2.003\text{m}$, $s_3 = 2\text{km}$; $h_4 = -2.501\text{m}$, $s_4 = 4\text{km}$。

若 P_i 各点的高程近似值取 $X^\circ = (0.000\quad 0.505\quad 4.515\quad 2.512)^{\mathrm{T}}_m$,试按亏秩问题处理,求出各点高程估值及其协因数 $\boldsymbol{Q}_X$。

6. 设有等精度观测的误差方程组为

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

试按序贯观测处理,求 $\boldsymbol{X}$ 及 $\boldsymbol{Q}_X$。

7. 若某点位的协因数为 $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1.21 & -0.28 \\ -0.28 & 0.94 \end{bmatrix}$,单位权方差为 $\sigma_0^2 = 2$,试求坐标中误差 m_x、m_y 及点位中误差 M;该点误差椭圆的 3 元素 E、F、φ_E。

8. 若某点位的协因数 $Q=\begin{bmatrix}1.69 & 0\\ 0 & 1.69\end{bmatrix}$，单位权方差 $\sigma_0{}^2=1$，试求误差椭圆元素 E、F、φ_E 的值。

9. 已知 P_1、P_2 两待点间坐标差的协因数阵为

$$Q=\begin{bmatrix}Q_{\Delta x\Delta x} & Q_{\Delta x\Delta y}\\ \\ Q_{\Delta x\Delta y} & Q_{\Delta y\Delta y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.200 & 0.433\\ \\ 0.433 & 0.700\end{bmatrix}$$

(dm^2/s^2)，单位权中误差 $\sigma_0=1(s)$。假定 P_1P_2 方向的坐标方位角 $\alpha_{P_1P_2}=60°$，边长 $S_{P_1P_2}=3.32km$，试求该边方位角中误差 $m_{\alpha_{P_1P_2}}$ 以及边长相对中误差 $m_{S_{P_1P_2}}/S_{P_1P_2}$。

10. 在工程实践中，P_1、P_2 两点间相对位置的点位中误差常按公式

$$M_{P_1P_2}=\pm\sqrt{M_{P_1}^2+M_{P_2}^2}$$

估算；而实际精度应按

$$M_{P_1P_2}=\pm\sqrt{E^2+F^2}$$

计算。请取用第四章第四节五中[例 4.3]计算出的有关数据代入上述两式，通过比较说明这是为什么。

第五章　地理空间信息基础

第一节　地理空间坐标系的建立

一、地球空间模型描述

为了深入研究地理空间，有必要建立地球表面的几何模型。根据大地测量学研究成果，地球表面几何模型可以分为四类，分述如下：

第一类是地球的自然表面。地球表面有高山、高原、平原、盆地和海沟等，是一个极为复杂的自然表面，是一个不规则的曲面，难于用一个简洁的数学表达式描述出来，不适合于数字建模，直接在地球表面上处理各种几何观测值是十分复杂困难的。

第二类是相对抽象的面，即大地水准面。地球表面的 71％ 被流体状态的海水所覆盖，所以静止的海水面是地球上最广大的天然的水准面。可以假设把这样完全静止的处于平衡状态的海平面延伸到所有大陆下面，而与地球重力方向（即铅垂线方向）处处正交的一个连续、闭合的水准面，称其为大地水准面。它所包围的形体称为大地体。由于大地水准面的形状和大地体的大小均接近地球自然表面的形状和大小，并且它的位置是比较稳定的。因此，传统的常规测量都是以大地水准面作为测量工作的基准面。

第三类是椭球体模型。虽然大地水准面最适合作为测量外业的基准面，但研究表明，大地水准面是略有起伏的不规则表面，也无法用数学公式把它精确地表达出来。因而也就不能确知其形状。这是由于地表起伏以及地层内部密度的变化造成地球体质量分布不均匀的缘故。

随着地学科学的发展，人们逐渐认识到地球的形状极近于一个两极略扁的旋转椭球，可以用数学公式将其准确地表达出来。椭球体的大小通常可用长、短半径 a、b 或一个半径 a（或 b）和扁率 $\alpha=\frac{a-b}{a}$ 来决定。与大地体最接近的椭球体被称为总椭球。所谓最接近就是指大小，形状及其相对于大地体位置应满足以下条件：

1）总椭球中心与地球质心重合；

2）总椭球旋转轴与地球自转轴重合，赤道与地球赤道重合；

3）总椭球的体积与大地体的体积相等，大地水准面与椭球面之间的高差（离差）平方和为最小。

总椭球的确定，必须以全球范围的大地测量和重力测量资料为根据才有可能。由于海洋面积占了71%，许多国家只能根据有限的陆地上的测量成果推算出与本国大地水准面密切配合的椭球面作为测量计算的基准面，这种椭球体称为参考椭球。可见，参考椭球有许多个，而总椭球只有一个。美国环境系统研究所(ESRI)的ARC/INFO软件中提供了多达30种旋转椭球体模型。我国从1949年以来一直采用克拉索夫斯基椭球体作为地球表面几何模型。

实际的地球自然表面、大地水准面和参考椭球体模型之间的关系如图5.1所示。

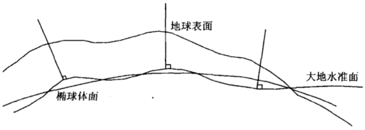


图5.1

第四类是为解决大地测量学中某些个别问题提出的，如类地形面，似大地水准面，静态水平衡椭球体等。

二、地理空间坐标系

为了确定物体在空间中的位置，常用坐标系来描述空间位置的表达形式。测量中常用的坐标系有以下几种：

1. 空间直角坐标系

如图5.2所示，空间直角坐标系原点位于参考椭球的中心 O 点，Z 轴指向参

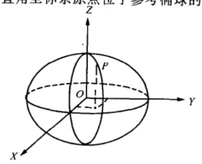


图5.2

考椭球的北极，X 轴指向起始子午面与赤道的交点，Y 轴位于赤道面上、且按右手系与 X 轴正交于 O 点处。某点 P 在空间中的位置可用该点在此坐标系中的各个坐标轴上的投影来表示。

目前，GPS 测量中所采用的 WGS－84 坐标系统就属于空间直角坐标系一类。它的坐标系原点位于地球的质心，Z 轴指向 BIH1984.0 定义的协议地球极方向，X 轴指向 BIH1984.0 的起始子午面和赤道的交点，Y 轴与 X 轴和 Z 轴构成右手系。

2. 空间大地坐标系

空间大地坐标系是采用大地经纬度和大地高来描述空间位置的。如图 5.3 所示，P 点所在子午面 NPS 与起始子午面 NGS 所夹的二面角 L，叫做 P 点的大地经度，由起始子午面算起，向东为正，向西为负。P 点的法线 Pn 与赤道面的夹角 B，叫做 P 点的大地纬度，由赤道面算起，向北为正，向南为负。大地高 H 是空间点 A 沿参考椭球的法线方向到参考椭球面 P 点的距离。

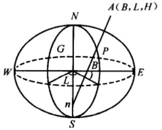


图 5.3

空间大地坐标系是常规大地测量的基本坐标系，曾为世界公用的最方便的坐标系统，由于经纬线是地形图的基本线，所以在传统的测图以及制图中都使用这种坐标系。像我国目前广泛采用的 1954 北京坐标系以及 1980 年西安大地坐标系都属于空间大地坐标系一类，只是所采用的地球椭球参数有所区别。

3. 平面直角坐标系

平面直角坐标系是利用投影变换，将空间坐标（空间直角坐标或空间大地坐标）通过某种数学变换映射到平面上，这种变换又称为投影变换。投影变换的方法有很多，在我国采用的是高斯-克吕格投影，也简称高斯投影。

第二节　空间数据质量

地理信息系统（GIS）是一种以采集、存储、管理、分析和描述整个或部分地球

表面与空间和地理分布有关的空间信息系统。而数据是 GIS 中最基本和最重要的组成部分，GIS 数据质量及其质量控制问题是目前国内外学者热门研究的问题之一。

一、空间数据质量的概念

GIS 数据是对现实世界中空间特征和过程的抽象表达，按其表达形式可分为两种类型。

1．空间数据，又称为图形数据

它是 GIS 的基础数据，是描述空间实体的位置、形状、大小及各个不同实体之间关系的信息。空间实体的位置通常以三维或二维坐标串来表示。

空间数据又可分为几何数据和关系数据两种。

几何数据是从几何角度把空间目标划分为点状（零维），线状（一维）和面状（二维）目标 3 种基本类型。

关系数据是描述各个不同空间实体之间的关系（如邻接、关联、包含、连通、接近度等）的信息。关系数据的建立有助于各种应用和空间分析。

2．非空间数据，又称为属性数据

它包括各个地理单元中社会、经济、或其他专题数据，是对地理单元（实体）专题内容的广泛、深刻的描述。从某种意义上也可以将关系数据归入属性数据。

由于现实世界的复杂性和模糊性，以及人类认识和表达能力的局限性，GIS 数据也总是不可能完全达到真值的，只能在一定程度上接近真值。一般来说，GIS 数据质量主要包括以下内容：

（1）位置精度（或称定位精度）

空间实体的坐标数据与实体真实位置的接近程度，表现为空间三维或二维坐标数据的精度，高程精度，接边精度，形状再现精度等。

（2）属性精度

实体的值与真实值相符的程度，它通常取决于数据的类型，且常与位置精度有关。属性精度包括要素分类与代码的正确性，要素属性值的正确性及名称的正确性等。

（3）时间精度

数据的现势性。可以通过数据采集、更新时间和更新频度来表现。

（4）逻辑一致性

数据之间的关系上的可靠性。包括数据结构，数据内容、空间属性与专题属性，以及拓扑性质上的内在一致性。

(5) 数据完整性

包括数据范围、数据的分层、实体类型、属性数据和名称等各方面的数据完整性。

(6) 数据情况说明

要求对数据的来源、数据内容及其处理过程等做出准确、全面和详尽的说明。

二、空间数据的误差类型

空间数据的质量通常用精度来衡量,而数据的精度反映的是数据误差离散的程度。数据质量的优劣虽不能用一个误差的大小来衡量,但误差的大小可以直接影响精度这一统计量的数值。随着数据采集、分析处理和应用过程中的每一步,都有可能引起误差的产生。影响数据质量的误差源可分为以下几种:

(1) 直接测量数据的误差

直接测量主要指常规大地测量、工程测量、GPS 测量和一些其他直接测量方法。用这些测量方法得到的表示空间位置信息的数据,常含有随机误差、系统误差和少量粗差。在测绘学科(前面几章内容)中,对这些测量数据的处理和精度分析做了较全面深入的研究。

(2) 遥感数据的误差

遥感与摄影测量是获得 GIS 数据的一种重要方法。遥感数据的质量问题来自于遥感观测、遥感图像处理和解释过程,包括分辨率、几何时变和辐射误差对数据质量的影响,影像或图像校正匹配,判读和分类等引入的误差和质量问题。遥感数据含有几何和属性两方面的误差。

(3) 地图数字化数据的误差

地图数字化数据也是 GIS 数据的一个重要数据来源。数字化方式主要有手工数字化和扫描数字化两种。由于扫描仪的分辨率和精度提高,使得扫描后矢量化逐渐成为更重要的地图数字化手段。影响数字化数据精度的主要因素有:地图原图的固有误差;图纸变形误差;地图要素本身的密度、宽度和复杂程度的影响;数字化仪或扫描仪的仪器误差;操作员及操作方式的影响等。

(4) 属性数据与文档数据的误差

属性数据与文档数据也是 GIS 的重要数据,一般由调查统计方法得到,要求数据要完整、清晰、无错误。

(5) 误差传播问题

GIS 产品是利用含有误差的空间数据,通过 GIS 分析操作产生的。整个过程中,GIS 数据的误差或不确定性均会以某种方式传播,不仅有算术关系下的误差传播,还有逻辑关系下的误差传播和不精确推理关系下的误差传播等。

(6) 数据转换与计算误差、叠加分析及其他质量问题

GIS 中数据转换误差包括数据结构的转换、数据格式和数据计算变换中的误差，如矢量数据转换为栅格数据会产生属性误差和拓扑匹配误差，不同文件格式的转换会造成信息损失和精度损失等。叠加分析时往往会产生拓扑匹配、位置和属性方面的质量问题。

需要说明的是，GIS 数据的质量问题是一个相对的概念，衡量数据质量的标准也会随着具体应用的特点和要求而变化。同时，数据具有不确定性，许多质量因素并不明显或很难确定，因此，在数据质量问题中，有可以减小甚至消除的误差，也有难以检测和控制的因素。

三、对地图数字化数据误差的分析

正如本节二中所述，地图数字化数据误差主要源自地图的固有误差和数字化过程中引入的误差。

1．地图的固有误差

该种误差是指数字化原图本身所具有误差，主要包括有：

1）控制点和地物点引入的误差及其展绘误差。

2）地图投影变形误差。

在绘制地图时，我国采用的是高斯正形投影，离分带中央子午线越远，变形越大。以 3°带分带为例，在我国幅员内其长度变形均大于 1/9000，海南地区由于纬度低，其长度变形达 1/3100。

3）地图编绘、绘图、地图综合、复制和分色板套合等误差。

4）图纸材料变形的误差。

由于图纸的大小随温度的变化而变化。在温度不变的情况下，若湿度由 0% 增加到 25%，则图纸的尺寸可能改变 1.6%。图纸的膨胀率与收缩率也不相同，即使温度恢复到原来的水平，图纸也并不能恢复到原来的尺寸。在印刷过程中，纸张先随温度的升高而变长变宽，又由于冷却产生收缩，最后图纸在长、宽方向的净增长约为 1.25% 和 2.5%，变形误差的范围是 0.24～0.48mm。若采用聚酯薄膜做二底图，材料变形误差则相对较小。

5）特征定义与特征夸大误差。

地面上许多特征并无明确的界限，如海岸线、森林地界等定义引起某些不确定性。为了增强图的可读性，有时又需要夸大某些特征，如分界线一般没有宽度，但在图上表示时，必然占一定的宽度。

2．数字化过程中引入的误差

该种误差主要与被数字化的要素对象、数字化仪、数字化操作方式和操作人员

的技能有关：

(1) 数字化要素对象

要素本身的宽度、密度和复杂程度对数字化的质量有显著影响。例如，粗线比细线更容易引起误差；复杂曲线比直线容易引起误差；密集要素比稀疏要素容易引起误差等。

(2) 数字化仪

数字化仪的分辨率和精度对数字化的质量有决定性的影响。选择数字化仪时要注意其实际分辨率和精度往往略低于其标称精度。

(3) 数字化操作人员与操作方式

操作人员的技能和经验直接影响到采集数据的精度、操作员的疲劳程度和数字化速度也会产生不同的影响。操作方式(包括选择采点数目和选择采点的点方式或流方式等)的不同也会产生不同的影响。

扫描数字化是采用高精度的扫描仪将图形、图像等扫描并形成栅格数据文件，再利用扫描矢量化软件对栅格数据文件进行处理，将其转换为矢量图形数据。扫描数字化数据产生误差的因素包括：原图的清晰度、扫描仪的分辨率和精度、扫描仪的操作人员经验和技能以及扫描矢量化软件的功能与质量等。

综上所述，影响地图数字化数据质量的因素很多，其中既有随机因素，又有系统因素。

实践表明，常规测量得到的测量数据的随机误差一般都服从正态分布；但数字化方法的测量数据由于其所受影响的因素更复杂，一些实验分析表明，它们不一定服从严格的正态分布，而是服从渐近的正态分布(例如，服从拉普拉斯分布和 P-范分布)。

第三节　空间数据的内插

对空间数据采集时，无论是观测值个数还是观测点的分布，既不是无限多个，也不可能分布有规则。有时需要获知感兴趣但又未观测的点的特征，例如地面上任意一点的高程，这种以参考点(观测点)上的信息(x, y, z)求定其他待定点上的高程问题，在数学上属于插值技术。一般说来，任意一种内插方法都是基于原始函数的连续光滑性，或者说邻近的数据点之间存在很大的相关性，这才有可能由邻近的数据点内插出待定点的数据。

一、双线性多项式(双曲面)内插

根据最邻近的 4 个数据点，可确定一个双线性多项式

$$z = \sum_{j=0}^{1} \sum_{i=0}^{1} a_{ij} x^i y^j$$
$$= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy \tag{5.1}$$

或用矩阵形式表示，有

$$z = [1 \quad x] \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

可见，利用 4 个已知数据可求出 4 个系数 a_{00}、a_{10}、a_{01}和 a_{11}，然后根据待定点坐标 (x, y)与求出的系数即可内插出该点的高程。双线性多项式的特点是：当坐标 x（或 y）为常数时，高程 z 与坐标 y（或 x）成线性关系，故称其为“双线性”。

当 4 个数据为正方形排列时，设边长为 l，如图 5.4 所示，由 p 点所在格网的 4 个拐角点高程 $z_{ij}(i, j = 0, 1)$，可列出关于系数 a_{ij} 的方程

$$\begin{bmatrix} z_{00} \\ z_{10} \\ z_{01} \\ z_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 & x_0y_0 \\ 1 & x_1 & y_0 & x_1y_0 \\ 1 & x_0 & y_1 & x_0y_1 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{11} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

$$\underset{4\times1}{\boldsymbol{Z}} = \underset{4\times4}{\boldsymbol{F}} \underset{4\times1}{\boldsymbol{A}} \tag{5.4}$$

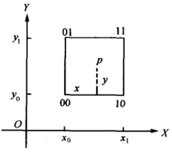


图 5.4

这是一个正则方程，因此

$$A = F^{-1}Z \tag{5.5}$$

若内插点 p 相对于(x_0, y_0)点的坐标为(x, y)，且考虑到 $x_1 - x_0 = y_1 - y_0 = l$，则得内插公式为

$$z_p = (1 - \frac{x}{l})(1 - \frac{y}{l})z_{00} + (1 - \frac{y}{l})\frac{x}{l}z_{10} + (1 - \frac{x}{l})\frac{y}{l} \cdot z_{01} + \frac{x}{l}\frac{y}{l}z_{11} \tag{5.6}$$

双线性多项式内插只能保证相邻区域接边处的连续，却不能保证光滑。但计算工作量较小，因而常被采用。

二、双三次多项式(三次曲面)内插

双三次多项式是双线性多项式的推广，对双三次多项式采用分块方式，每一分块都可以定义出一个不同的多项式曲面，当 n 次多项式与其相邻分块的边界处所有 $n-1$ 次导数都连续时，称之为样条函数。

设有三次曲面方程为

$$\begin{aligned} z = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} a_{ij}x^i y^j = \\ a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{30}x^3 + \\ a_{01}y + a_{11}xy + a_{21}x^2y + a_{31}x^3y + \\ a_{02}y^2 + a_{12}xy^2 + a_{22}x^2y^2 + a_{32}x^3y^2 + \\ a_{03}y^3 + a_{13}xy^3 + a_{23}x^2y^3 + a_{33}x^3y^3 \end{aligned} \tag{5.7}$$

写成矩阵形式，有

$$
z = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix} \tag{5.8}
$$

若数据点呈方格网分布，如图 5.5 所示，将坐标原点平移至待定点 p 所在方格网之左下角，则 p 点坐标 (x,y) 满足 $0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant y \leqslant l$，其中 l 为格网边长。为了方便，不妨令 $l = 1$，则 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$。

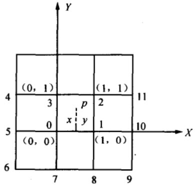


图 5.5

由(5.8)式可见，待定系数共有 16 个，除了 p 点所在格网 4 个结点信息(x,y,z)能列出 4 个方程外，其余 12 个方程只能根据每个结点处在沿 x 轴和 y 轴两个方向的斜率(一阶偏导数)R、S 以及扭矩(二阶混合导数)T 列出。即有

$$
\left.\begin{aligned} R &= \frac{\partial z}{\partial x} \\ S &= \frac{\partial z}{\partial y} \\ T &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \tag{5.9}
$$

对于图 5.5 中 p 点所在的格网，4 个结点的三维坐标分别是 $0(0,0,z_0)$，$1(1,0,z_1)$，$2(1,1,z_2)$，$3(0,1,z_3)$。以 0 点为例，所建立的 4 个方程为

$$
\begin{cases}
z_0 = a_{00} \\
R_0 = \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_0 = \dfrac{1}{2}(z_1 - z_5) \\
S_0 = \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_0 = \dfrac{1}{2}(z_3 - z_7) \\
T_0 = \left.\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\right|_0 = \dfrac{1}{4}(z_2 + z_6 - z_4 - z_8)
\end{cases}
\tag{5.10}
$$

按同样的方法可建立分别以 1、2、3 为结点的其他共 12 个上述类型的方程。

用格网 4 个结点的高程，以及由各相关数据点(相邻的其他格网的结点)高程计算得到的两个方向上的斜率和扭矩数值可以组成一个 4×4 阶的常量矩阵 $\boldsymbol{Z}$，即

$$
\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} z_0 & S_0 & z_3 & S_3 \\ R_0 & T_0 & R_3 & T_3 \\ z_1 & S_1 & z_2 & S_2 \\ R_1 & T_1 & R_2 & T_2 \end{bmatrix}
\tag{5.11}
$$

根据对斜率 R、S 和扭矩 T 的定义，以及二元三次样条函数的定义，有

$$
\begin{cases}
R = \dfrac{\partial z}{\partial x} = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2]\boldsymbol{A}[1 \quad y \quad y^2 \quad y^3]^{\mathrm{T}} \\
S = \dfrac{\partial z}{\partial y} = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3]\boldsymbol{A}[0 \quad 1 \quad 2y \quad 3y^2]^{\mathrm{T}} \\
T = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2]\boldsymbol{A}[0 \quad 1 \quad 2y \quad 3y^2]^{\mathrm{T}}
\end{cases}
\tag{5.12}
$$

式中：$\boldsymbol{A}$ 为待求系数矩阵，也就是(5.8)式右端的第二项。

将 p 点所在格网的 4 个结点的平面坐标分别代入上式，则得

$$
\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5.13}
$$

写成紧凑矩阵形式，有

$$
\underset{4\times4}{\boldsymbol{Z}} = \underset{4\times4}{\boldsymbol{X}}\underset{4\times4}{\boldsymbol{A}}\underset{4\times4}{\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}} \tag{5.14}
$$

不难求得 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的逆矩阵，有

$$
\boldsymbol{X}^{-1} = \boldsymbol{Y}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.15}
$$

因此，(5.14)式的解为

$$
\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y}^{-1})^{\mathrm{T}} \tag{5.16}
$$

三次曲面(多项式)内插用于精确的局部内插，即在每一个方格网内拟合一个三次曲面，由于同时还考虑了一阶偏导数与二阶混合导数，因而它能保证相邻的各曲面之间的连续与光滑。

三、移动拟合法内插

这种方法是以待定点为中心的单点移面内插方法。对每一个待定点取一个多项式曲面来拟合该点附近的地形表面。此时，取用待定点 p 为圆心，以 r 为半径作圆(图 5.6)，凡落在圆内的数据点即被选用。所选点数应根据采用的局部拟合函数来确定，在二次曲面内插时，数据点个数 $n>6$，且数据点 i 到待定点 p 的距离

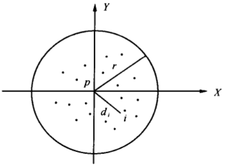


图 5.6

$$\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = d_i \leqslant r \tag{5.17}$$

式中:$\Delta x_i = x_i - x_p$;$\Delta y_i = y_i - y_p$;$(\Delta x_i, \Delta y_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$相当于圆内数据点经中心化后的坐标。此时的二次多项式可写为

$$z = A\Delta x^2 + B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 + D\Delta x + E\Delta y + F \tag{5.18}$$

数据点 i 对应的误差方程式为

$$v_i = \Delta x_i^2 A + \Delta x_i \Delta y_i B + \Delta y_i^2 C + \Delta x_i D + \Delta y_i E + F - z_i^0$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n) \tag{5.19}$$

写成矩阵-向量形式,有

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{KX} - \boldsymbol{Z}^0 \tag{5.20}$$

式中:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \Delta x_1^2 & \Delta x_1 \Delta y_1 & \Delta y_1^2 & \Delta x_1 & \Delta y_1 & 1 \\ \Delta x_2^2 & \Delta x_2 \Delta y_2 & \Delta y_2^2 & \Delta x_2 & \Delta y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta x_n^2 & \Delta x_n \Delta y_n & \Delta y_n^2 & \Delta x_n & \Delta y_n & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ \vdots \\ F \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}^0 = \begin{bmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \\ \vdots \\ z_n^0 \end{bmatrix}$$

由于圆内每个数据点 i 相对于中心点(待定点) p 的作用各不相同,因此要对每个数据点定权。常采用如下几种定权公式:

$$
\left.\begin{aligned}
p_i &= \frac{1}{d_i^2} \\
p_i &= (\frac{r - d_i}{d_i})^2 \\
p_i &= \exp(-\frac{d_i^2}{k^2})
\end{aligned}\right\} \tag{5.21}
$$

式中：k 为一个供选择的常数。

可见，3 种定权公式都与数据点到待定点的距离 d_i 有关，d_i 越小，对待定点的影响愈大；反之，亦真。

需要指出的是，这里的权 p_i 并不代表数据点 i 的观测精度，只表明该数据点对待定点的关联程度。此外，究竟选用哪种定权形式，应根据地形实验选取。

按数据处理的步骤，根据(5.20)式组成法方程并对其求解，得二次曲面系数的解为

$$
\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}^0 \tag{5.22}
$$

在解向量 $\boldsymbol{X}$ 中，由于 $\Delta x_p = \Delta y_p = 0$，所以系数 F 就是待定点的内插高程值。

利用二次曲面移动拟合法内插时，对点的选择除了应满足 $n > 6$ 外，还应保证各个象限都应分布有数据点，且地形起伏变化较大时，半径 r 不能取得过大。当数据点稀疏或分布不均匀乃至有跃变数据范围时，应考虑采用其他局部函数拟合。

除上述介绍的局部内插技术外，还有其他一些内插方法，如多面函数法，最小二乘配置法，有限元法内插等。这些方法常用于数据表面复杂，待求点众多的地形表面，用于生成规则格网的数字地面模型(DEM)。总之，内插技术的应用是十分广泛的，限于篇幅不能一一介绍。

第四节　地图投影的基本概念

在各类地理信息系统的建立过程中，选择适当的地图投影系统是必须首要考虑的问题之一。这是因为各种地理信息的输入输出以及分析，匹配处理等都应处在一个统一的定位框架内，使各种来源的地理信息和数据能够具有共同的地理基础。

一、投影与变形

投影在数学上是指建立两个点集间一一对应的映射关系。所谓地图投影，就是建立地球表面上的点与投影平面上点之间的一一对应关系。也就是将椭球面上的各元素(包括坐标，方向和长度)按一定的数学法则投影到平面上。这个数学法则可表示为

$$\left.\begin{aligned} x &= F_1(B, L) \\ y &= F_2(B, L) \end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

式中：(B, L)是椭球面上某点的大地坐标；(x, y)是该点投影后的平面直角坐标。

为了建立椭球面元素与投影面相对应元素之间的解析关系式，不同的投影方法产生了众多投影种类。有人统计全世界大约有 250 余种各种各样的投影方法，而解析投影方法的本质特征都是由坐标投影公式(5.23)中 F 的具体形式体现的。

椭球面是一个凸起的、不可展平的曲面。如果将这个曲面上的元素，比如一段距离、角度、一个图形投影到平面上，就会和原来的距离、角度、图形呈现差异，这一差异即为投影变形。投影变形一般分角度变形、长度变形和面积变形 3 种。

地图投影产生变形是不可避免的，人们可以根据需要使其一种变形为零，也可以使全部变形都减小到某一适当程度。例如，地图投影中产生的所谓等角投影(投影前后的角度相等，长度和面积有所变形)、等距投影(投影前后的长度相等，角度和面积有变形)以及等积投影(投影前后的面积相等，角度和边长有变形)等。

等角投影又称正形投影。采用正形投影就意味着在椭球面上进行的大量角度观测元素在投影前后保持不变；它可以保证在有限范围内地图上的图形同椭球面上的原形保持相似。由于在正形投影中，长度比仅与点的位置有关，而与方向无关，这就给测制地图以及在地图上进行各种量算工作等带来极大方便。

二、高斯投影

高斯投影又称横轴等角切椭圆柱投影。它是用一个假想的椭圆柱面横套在地球椭球体外面，该椭圆柱面与椭球面的切线为某一经线(投影中称其为中央子午线或轴子午线)，椭圆柱的中心轴通过椭球体中心，然后根据一定的约束条件(即投影条件)，将中央子午线两侧规定的经差范围内所有点投影到椭圆柱面上，再将此柱面展开即成为投影面，如图 5.7 所示。

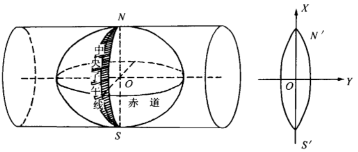


图 5.7

高斯投影是正形投影中的一种。它除了应该满足正形投影的一般条件(长度比与方向无关)外,还应满足高斯投影本身的特殊条件。综合所述,高斯投影必须满足下述 3 个条件:

1) 中央子午线和地球赤道投影后成为相互垂直的直线,且为投影的对称轴;

2) 中央子午线投影后长度不变;

3) 投影具有正形条件,即等角投影。

根据上述条件推导出的高斯投影坐标正算[由大地坐标(B, L)求平面坐标(x, y)]公式为

$$\begin{cases} x = X + \dfrac{N}{2\rho''^2}\sin B\cos B l''^2 + \dfrac{N}{24\rho''^4}\sin B\cos^3 B(5 - t^2 + \\ \quad 9\eta^2 + 4\eta^4)l''^4 + \dfrac{N}{720\rho''^6}\sin B\cos^5 B(61 - 58t^2 + t^4)l''^6 \\ y = \dfrac{N}{\rho''}\cos B l'' + \dfrac{N}{6\rho''^3}\cos^3 B(1 - t^2 + \eta^2)l''^3 + \\ \quad \dfrac{N}{120\rho''^5}\cos^5 B(5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2)l''^5 \end{cases} \tag{5.24}$$

式中:x, y 为投影后的高斯平面纵、横坐标;X 为经度为零时对应的纵坐标值,也就是由赤道至纬度 B 处中央子午线弧长;B 为纬度;l'' 为以角秒为单位的经差;N 为卯酉圈曲率半径;$\rho'' = 206\ 265$;$t = \tan B$;$\eta = e'\cos B$,其中 e' 为地球的第二偏心率[见后续公式(5.41)的说明]。

顺便给出高斯投影坐标反算[由平面坐标(x, y)求大地坐标(B, L)]公式为

$$\begin{cases} B = B_f - \dfrac{t_f}{2M_fN_f}y^2 + \dfrac{t_f}{24M_fN_f^3}(5 + 3t_f^3 + \eta_f^3 - 9\eta_f^2t_f^2)y^4 - \\ \quad - \dfrac{t_f}{720M_fN_f^5}(61 + 90t_f^2 + 45t_f^4)y^6 \\ l = \dfrac{1}{N_f\cos B_f}y - \dfrac{1}{6N_f^3\cos B_f}(1 + 2t_f^2 + \eta_f^2)y^3 + \\ \quad + \dfrac{1}{120N_f^5\cos B_f}(5 + 28t_f^2 + 24t_f^4 + 6\eta_f^2 + 8\eta_f^2t_f^2)y^5 \end{cases} \tag{5.25}$$

式中：B_f 为横坐标值等于零时对应的纬度，也就是将 x 看做 X 时由子午线弧长公式反求出的纬度，也时称底点纬度。M_f 为横坐标值等于零时所对应的子午圈曲率半径；其余有下标 f 的各量也都是类似上述的各自相应的意义。

高斯投影长度变形用大地坐标表示的长度比公式为

$$m = 1 + \frac{1}{2}l''^2\cos^2B(1 + \eta^2) + \frac{1}{24}l''^4\cos^4B(5 - 4t^2) \tag{5.26}$$

式中各量的意义同(5.24)式。

若以平面坐标表示的长度比公式为

$$m = 1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4} \tag{5.27}$$

式中：$R_m = \sqrt{MN}$ 表示大地线(椭球面上的两点最短连线)始末两端点的平均曲率半径；y_m 为平面上相应两端点的横坐标均值。

由长度比公式可见，高斯投影长度变形具有如下特点：

1) 中央子午线上无变形，其余子午线均凹向中央子午线，并向两极收敛；

2) 同一条经线上，纬度越低，变形越大；

3) 同一条纬线上，离中央子午线越远，变形越大。

为了限制长度变形，通常采用投影分带的办法，按着一定间隔的经差(6°或 3°)划分为相互不重叠的投影带，如图 5.8 所示。6°带是由起始子午线算起，每隔经差 6°自西向东划分为 60 个投影带，每带中央子午线的经度 L_0 与带号 n 有如下关系

$$L_0 = 6°n - 3°$$

或

$$n = \frac{1}{6^\circ}(L_0 + 3^\circ) \tag{5.28}$$

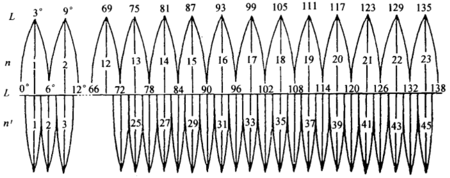


图 5.8

3°带是在 6°带的基础上划分的。第一个 3°带的中央子午线与第一个 6°带中央子午线是相重合的,自西向东全球划分为 120 个 3°带。3°带中央子午线的经度 L_0 为

$$L_0 = 3^\circ n' \tag{5.29}$$

我国幅员辽阔,自西向东横跨 11 个 6°带宽(由 13～23 带)。

在投影平面上,中央子午线和赤道的投影都是直线且为纵,横坐标轴,其交点为坐标原点,构成了高斯平面直角坐标系。不难理解,我国的纵坐标都是正值;为避免横坐标出现负值,通常在横坐标的自然值前面加上某一常数(例如 6°带的 y 坐标自然值加 500km)。并在 y 值前面再冠以带号,称这种坐标为国家统一坐标。

顺便指出,在进行高斯投影坐标反算以及大地测量观测值向椭球面、高斯平面作归化和改化计算时,所用到的 y 值应取自然值。

三、投影面与投影带的选择

由第五章第一节和本节前面的内容可知,地面上的观测值(坐标、角度或边长等)首先要归化到某一高度的椭球体面上,然后按着高斯正形投影到平面上。不妨以边长为例,如图 5.9 所示,D 为测线平均高程面上经气象、倾斜改正后的边长,如果将其归化到参考椭球面上,其边长改正数为

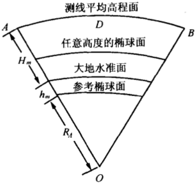


图 5.9

$$\Delta D = [-\frac{H_m + h_m}{R_A} + \frac{(H_m + h_m)^2}{R_A^2}]D \tag{5.30}$$

式中：R_A 为测线方向参考椭球面法截弧的曲率半径，$R_A = \sqrt{MN}(1 - \frac{e^2}{2}\cos B_m^2 \cos 2\alpha)$；$e$ 为第一偏心率，克氏椭球可取 $e = 0.0066934$；B_m 为测线中点纬度；α 为测线所处方位角；H_m 为高出大地水准面的高程，如果是将测线投影到任意高度的椭球面上，此时的 H_m 就表示高出任意椭球面的高差；h_m 为大地水准面与参考椭球面的差数。

如果令归化到参考椭球面上的长度为 S，则由高斯正形投影长度比公式(5.27)式可得边长改化公式为

$$\Delta S = (\frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2})S \tag{5.31}$$

式中：R_m 为测区平均纬度下的平均曲率半径；y_m 为测线两端横坐标均值；Δy 为测线两端横坐标之差。

顺便指出，(5.30)式与(5.31)式是理论上的精确公式，实际中公式里的各量常以近似值代替，并且公式右端的第二项也常被舍弃。若取近似关系式，则有

$$-\frac{H}{R} + \frac{y_m^2}{2R^2} \leqslant \frac{1}{T} \tag{5.32}$$

式中：R 为测区平均曲率半径；H 为高出某一椭球面的高差；$\frac{1}{T}$是允许的长度变形（阈值）。为了满足城市 1∶500 比例尺测图和各种市政工程施工放样的精度，取 $\frac{1}{T} \leqslant \frac{1}{40\ 000}$，相当于长度变形值应不大于 2.5cm/km 为原则。

由高斯投影的特点 3）可知，离中央子午线越远，投影后的长度变形就愈大。我国幅员东西跨度由东经 72°到 136°之间，其中不乏有的地区和城市位于分带的边缘子午线附近，仅以 3°带为例，在变形较小的纬度 55°地区，边缘子午线附近的长度变形就已达 1/8800，在变形较大的纬度 20°地区，边缘子午线附近的变形值达 1/3300。可见，为了有效地限制边缘子午线附近的变形，有时还按 1.5°的经差分带，它可以 3°带为基础划分，也可以任意一条子午线为中央子午线划分 1.5°带。但均不属于国家统一的坐标系。

由(5.32)式可见，引起长度变形的不仅是由于投影本身以及投影带宽度的划分；观测值的归化过程也将引起长度变形。当归化高程 H_m 大约等于 160m 时，归化引起的长度变形达1/40 000。我国西、北部地势海拔高于东、南部地区，城市平均高程大于 160m 的不在少数。为了满足城市大比例尺测图以及各种市政建设，施工放样等工作对精度的要求，对某些地理位置处于边缘子午线附近，或测区平均高程较大的、或两者兼而有之的城市或地区，投影带与投影面的选择是十分重要的，实际上也就是坐标系统的选择问题。选择的基本出发点是：

1）当长度变形值≤2.5cm/km 时，可采用国家统一的 3°带（或 6°带）坐标系；

2）当长度变形值＞2.5cm/km 时，可采用任意带的高斯投影平面直角坐标系，其中：

① 改变带宽，取用 1.5°带或移动中央子午线使其通过测区中央来限制由于测区处于 3°带边缘产生的投影变形；

② 选择不同高度的相对参考椭球面（如抵偿面或城市平均高程面）来限制由于归化高程引起的长度变形；

③ 根据需要，有时可能要联合使用方法①和方法②来达到限制由归化高程和投影改正引起的长度变形。

最后指出，我国 1∶100 万地形图采用的是 Lambert（正轴等角割圆锥）投影，其分幅原则与国际地理学会标准相一致。

第五节　空间坐标转换

一、坐标系统概述

坐标系统是由坐标系和基准两方面要素构成的。坐标系是指描述空间位置的表达形式；而基准指的是为描述空间位置而定义的一系列点、线、面。在大地测量

中，基准一般是指为确定点在空间中的位置，而采用的地球椭球或参考椭球的几何参数和物理参数，及其在空间的定位、定向方式，和描述空间位置时所采用的单位长度的定义。

不同的地球椭球参数，不同的椭球定位和定向方法都将产生不同的坐标系统；相同基准下，由于描述空间位置的表示不同或者是投影方式的不同也会产生出不同的坐标系统。可见，测量中使用的坐标系统远不止一二种，这也就应运产生了不同坐标系统之间坐标转换的问题，其中包括坐标系之间的转换和基准之间进行地转换。空间坐标的转换有的是在二维空间，有的是在三维空间。有时发生在椭球面之间，有时发生在椭球面与平面之间，或者是发生在平面与平面之间。其目的就是，根据不同的需要将源于不同的表达空间信息的数据都置于某一统一的构架之中。

二、空间坐标转换

1．椭球面之间的坐标转换

1）在相同的基准下，不同坐标系之间的转换。其中，由大地坐标转换成空间直角坐标的公式为

$$X = (N + H)\cos B\cos L \tag{5.33}$$

$$Y = (N + H)\cos B\sin L \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned} Z &= [N(1 - e^2) + H]\sin B \\ &= [N \cdot \frac{a^2}{b^2} + H]\sin B \end{aligned} \tag{5.35}$$

式中：a、b 为地球椭球长、短半轴；第一偏心率和卯酉圈曲率半径分别为

$$e = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad , \quad N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\sin^2 B}} \tag{5.36}$$

由空间直角坐标转换成大地坐标的公式为

$$L = \arctan\frac{Y}{X} \tag{5.37}$$

$$B = \arctan \frac{Z(N + H)}{\sqrt{(X^2 + Y^2)[N(1 - e^2) + H]}} \tag{5.38}$$

$$H = \frac{Z}{\sin B} - N(1 - e^2) \tag{5.39}$$

在采用上式进行转换时,须用迭代的方法,可先用下式求出 B 的初值

$$E = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \tag{5.40}$$

然后,利用纬度 B 的初值 E 求定 H、N 的初值,根据 H、N 的初值再次求定 B 值。也可以采用下述公式直接转换大地纬度 B 和大地高 H

$$B = \arctan \frac{Z + e'^2 b \sin^3\theta}{\sqrt{X^2 + Y^2} - e^2 a \cos^3\theta} \tag{5.41}$$

其中:第二偏心率 $e'^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{b^2}$; $\theta = \arctan \dfrac{Z \cdot a}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot b}$。

2) 在不同的基准下,相同坐标系之间的转换,实际上是基准间的转换,如图5.10所示。基准间转换方法有许多,最为常用的是布尔沙模型,又称为七参数转换法。

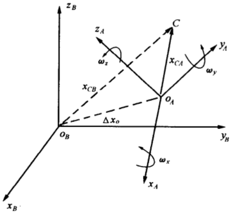


图 5.10

设两个空间直角坐标系间的 7 个转换参数分别是 3 个平移参数(Δx_0, Δy_0,

Δz_0)，3 个旋转参数($\omega_x, \omega_y, \omega_z$)，1 个尺度参数 m。令$(x_A, y_A, z_A)^{\mathrm{T}}$ 为某点在空间直角坐标系 A 的坐标，$(x_B, y_B, z_B)^{\mathrm{T}}$ 为该点在空间直角坐标系 B 的坐标，则

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \end{bmatrix} + (1 + m)\boldsymbol{R}(\omega)\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \tag{5.42}$$

式中：

$$\boldsymbol{R}(\omega_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega_x & \sin\omega_x \\ 0 & -\sin\omega_x & \cos\omega_x \end{bmatrix} \tag{5.43}$$

$$\boldsymbol{R}(\omega_y) = \begin{bmatrix} \cos\omega_y & 0 & -\sin\omega_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\omega_y & 0 & \cos\omega_y \end{bmatrix} \tag{5.44}$$

$$\boldsymbol{R}(\omega_z) = \begin{bmatrix} \cos\omega_z & \sin\omega_z & 0 \\ -\sin\omega_z & \cos\omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.45}$$

由于 ω_x、ω_y 和 ω_z 一般均为小角度，因此有

$$\cos\omega \approx 1 \quad , \quad \sin\omega \approx \omega \tag{5.46}$$

所以

$$\boldsymbol{R}(\omega) = \boldsymbol{R}(\omega_z) \cdot \boldsymbol{R}(\omega_y) \cdot \boldsymbol{R}(\omega_x)$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_z \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{bmatrix} \tag{5.47}
$$

也可将转换公式表示为

$$
\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{K} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ m \end{bmatrix} \tag{5.48}
$$

式中：

$$
\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0 & -z_A & y_A & x_A \\ z_A & 0 & -x_A & y_A \\ -y_A & x_A & 0 & z_A \end{bmatrix} \tag{5.49}
$$

顺便指出，(5.42)式和(5.48)式表示的仅仅是不同基准间坐标系统转换的关系，还必须根据至少4个同名(重合)点，按最小二乘准则求出7个转换参数后，代入(5.42)式或(5.48)式方能进行空间直角坐标间的转换。

2. 椭球面与平面之间的坐标转换

1) 在相同的基准下进行的，例如在第五章第四节二中介绍的高斯投影正、反算公式(5.24)式和(5.25)式，或者是由其他投影方式推导出的坐标正、反算公式，都是为了解决椭球面上的大地坐标(B, L)与平面上的坐标(x, y)之间的转换，可表示为$(B, L) \Leftrightarrow (x, y)$。

2) 在不同基准下的平面坐标有时可借助空间直角坐标作为过渡坐标来完成不同系统间坐标的转换。例如，1954年北京坐标系和1980年国家大地测量坐标系(也称1980年西安大地坐标系)分别是针对克氏椭球元素和IAG1975年推荐的椭球参数，并采用不同的椭球定位方法而建立起来的两个不同的测量坐标系统。

显然,同一点在不同坐标系统中的高斯平面直角坐标可通过下列过程实现:

$$(x_1, y_1) \to (B_1, L_1) \to (X_1, Y_1, Z_1) \to (X_2, Y_2, Z_2) \to (B_2, L_2) \to (x_2, y_2) \tag{5.50}$$

式中:下标 1 和 2 分别代表两种坐标系统。

当然,也可以不借助空间直角坐标,而直接通过大地坐标进行换算,其过程为

$$(x_1, y_1) \to (B_1, L_1) \Rightarrow (B_2, L_2) \to (x_2, y_2) \tag{5.51}$$

上述两种过程,无论采用哪一种,除必须知道两个参心坐标系所属的地球椭球元素外,还必须知道(或求得)能实现“⇒”这一步的有关的转换参数。

3. 平面与平面之间的坐标转换

1) 在相同的基准、相同的投影方式下进行的平面坐标间的转换发生在邻带之间的坐标换算。例如高斯正形投影是按一定的经差宽度分带的,由于各带的中央子午线不同而形成的坐标系也不同,时常需要在6°带与6°带之间,6°带与3°带以及3°带与3°带之间进行邻带坐标换算。其过程是,按高斯投影反算公式求得某点的大地坐标

$$\begin{cases} B = B(x_1, y_1) \\ L = L(x_1, y_1) \end{cases} \tag{5.52}$$

然后,按高斯投影正算公式求得该点在新的中央子午线为投影纵轴的邻带内的高斯平面直角坐标

$$\begin{cases} x_2 = F_1[B(x_1, y_1), L(x_1, y_1)] \\ y_2 = F_2[B(x_1, y_1), L(x_1, y_1)] \end{cases} \tag{5.53}$$

式中:x, y 下标 1 和 2 表示相邻的两个分带。

2) 在相同的基准、不同的投影方式下也可以产生不同的坐标系。例如高斯投影平面坐标与兰勃特或墨卡托这类投影坐标系间的坐标换算,可以采用直接变换(又称正解变换),通过建立两个不同投影面上的点的一一对应关系来实现

$$
\begin{cases} X = \varphi_1(x, y) \\ Y = \varphi_2(x, y) \end{cases} \tag{5.54}
$$

式中:假定 x、y 为高斯平面坐标;X、Y 为另一类投影面上相应的平面坐标。

顺便说明,两种坐标系之间的关系 φ_1 和 φ_2 有时是比较容易建立的,例如高斯投影与兰勃特投影之间的坐标转换;但在某些情况下,建立直接的解析关系式还是有困难的。因此,可以采用类似(5.52)式和(5.53)式的间接作法。只不过(5.53)式中表示高斯投影正算关系的 F_1、F_2 应换成表示另一类投影正算关系的 ψ_1 和 ψ_2。相应地,等号左端的 x_2、y_2 改写成 X、Y,等号右端 x、y 的下标 1 也应去掉。

3) 不同基准下,平面与平面之间的坐标转换除了可以按着(5.50)式、(5.51)式所示过程完成外,还可以按如下过程实现

$$
(X_1, Y_1, Z_1) \rightarrow (B_1, L_1) \rightarrow (x_1, y_1) \Rightarrow (x_2, y_2) \tag{5.55}
$$

该式表达的是将地球椭球面上的某点所在空间直角坐标系的坐标换算成大地坐标系坐标,再按某一投影方式转换成平面直角坐标,与该平面上原有坐标的关系属于不同系统间的坐标,可通过(后述的)平面与平面之间的坐标转换公式实现。

此外,常有这种情况,在一个测区内虽然是在相同的基准上,由于各单位所做的控制要求不同,有时也需将地方性独立控制网合并到国家网或其他别的新的测量控制网中,做到成果的相互利用和统一测区的坐标系统。不同坐标系之间的平面坐标换算问题可表示为

$$
(x_1, y_1) \leftrightarrows (x_2, y_2) \tag{5.56}
$$

三、应用最小二乘准则进行平面之间的坐标换算

假定同名(重合)点在新、旧坐标系中的坐标分别为(x, y)和(X, Y),为了将旧坐标系中的成果合理地匹配到新的坐标系中,须对旧坐标系施以平移、旋转和尺度因子的改正,如图 5.11 所示。显然有变换方程

$$
\begin{cases} x = p + cX - dY \\ y = q + dX + cY \end{cases} \tag{5.57}
$$

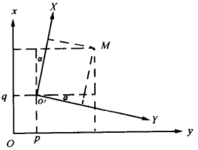


图 5.11

式中：p、q、c、d 为变换元素，其中 $c = k\cos\alpha, d = k\sin\alpha$。若令

$$\begin{cases} x = x^0 + \delta x \\ y = y^0 + \delta y \end{cases}, \quad \begin{cases} X = X^0 + \delta X \\ Y = Y^0 + \delta Y \end{cases} \tag{5.58}$$

代入(5.57)式，经整理，得

$$\begin{cases} v_x = p + X^0 c - Y^0 d - x^0 \\ v_y = q + X^0 d + Y^0 c - y^0 \end{cases} \tag{5.59}$$

式中：

$$\begin{cases} v_x = \delta x - c\delta X + d\delta Y \\ v_y = \delta y - d\delta X - c\delta Y \end{cases} \tag{5.60}$$

若新、旧坐标系中有$\frac{n}{2}$个同名(重合)点，则可组成 n 个形如(5.59)式中的方程，将其写成矩阵形式为

$$\underset{n\times1}{\mathbf{V}} = \underset{n\times4}{\mathbf{A}}\,\underset{4\times1}{\mathbf{X}} - \underset{n\times1}{\mathbf{L}} \tag{5.61}$$

式中：

$$
\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \\ \vdots \\ v_{\frac{n}{2}} \\ v_{\frac{n}{2}} \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} x_1^0 \\ y_1^0 \\ x_2^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ x_{\frac{n}{2}}^0 \\ y_{\frac{n}{2}}^0 \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} p \\ q \\ c \\ d \end{bmatrix};
$$

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & X_1^0 & -Y_1^0 \\ 0 & 1 & Y_1^0 & X_1^0 \\ 1 & 0 & X_2^0 & -Y_2^0 \\ 0 & 1 & Y_2^0 & X_2^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & X_{\frac{n}{2}}^0 & -Y_{\frac{n}{2}}^0 \\ 0 & 1 & Y_{\frac{n}{2}}^0 & X_{\frac{n}{2}}^0 \end{bmatrix}。
$$

不难看出，(5.61)式即为新、旧坐标系之间进行坐标转换的参数方程。当公共点个数大于2(即 $n>4$)时，按最小二乘准则对(5.61)式通过组成的法方程组进行求解和评定精度。在此不再赘述。

最后指出，坐标换算的内容和方法是很多的。例如遥感测量中，卫星扫描图上各点的坐标是扫描的行列号(N, M)，若忽略地面高程和地球曲率等影响，那么(N, M)与地面各点的平面坐标(X, Y)之间也存在一个线性变换。

高原地区的城市或工矿区平面控制网为减小长度变形，常以城市(或测区)平均高程面作为投影时归化参考面，为利用国家点作为起算数据，可选取某一国家点

在3°带的平面坐标作为控制网的坐标"原点"，其他国家点的坐标可按下式化算到城市(或测区)平均高程面相应的坐标系中去。

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + (x - x_0)\frac{h_m}{R_m} \\ y' &= y + (y - y_0)\frac{h_m}{R_m} \end{aligned}\right\} \tag{5.62}$$

式中：x'，y'为任一国家点经化算后的坐标；x，y 为同一国家点在3°带内的坐标；x_0，y_0 为取作原点的国家点在3°带中的坐标；h_m 为城市(或测区)平均高程面(参考面)的高程；R_m 为城市(或测区)平均纬度处的平均曲率半径。

按(5.62)式化算后的坐标值，可作为平面控制网的起算数据。

思考题与习题

1. 地球表面的几何模型是如何分类的？

2. 测量工作的基准面和测量计算的基准面相同吗？为什么？

3. 教材中介绍的地理空间坐标系是如何定义的？每一种坐标系都是固定不变的吗？

4. 影响空间数据质量的误差源有哪些？

5. 地图数字化数据误差源主要来自哪几个方面？与全野外采集的数字化数据相比较，精度如何？

6. 双线性多项式内插与双三次多项式内插的优缺点各是什么？

7. 若在某相片图上采样得下列数据

X：337，324，351，343，328，341，330，327，336，338，329，342，331，335；

Y：54，52，49，52，57，62，46，59，55，61，47，43，42，53；

H：89，60，56，86，70，46，58，62，81，54，49，74，86，63。

试用移动拟合法内插，求定二次多项式各拟合系数($A \sim F$)。

8. 为什么说正形投影给地图测制以及在图上的量算工作等带来极大方便？

9. 高斯正形投影的特点是什么？

10. 平面坐标系统选择的基本出发点是什么？

11. 如教材中图5.9所示，若将边长 D 归化到大地水准面上，求证其改正数 $\Delta D = -\frac{H_m}{R_A}D$。

12. 某地位于3°带边缘附近，已知该地所处纬度处的3°带宽为288.4km，求证

其投影后的长度变形为 $\frac{\Delta D_0}{D_0}=\frac{1}{3900}$（$D_0$ 为大地水准面上的长度）。

13. 某地大地坐标 $B=29°34'16''.5412$, $L=119°25'45''.5443$, 与其相应的 3°带高斯平面直角坐标的自然值为 $x=3\ 272\ 782.316$, $y=-55\ 299.545$ 。问中央子午线 L_0 为多少？请写出国家统一平面坐标形式表达的坐标值。

14. 现有 WG-84 系统 GPS 空间直角坐标(X, Y, Z)，如果将其转换成我国的 54 北京坐标系成果，请简单写出转换路径。

第六章　多元统计分析

第一节　多元总体与样本

一、多 元 总 体

在生产与科研中，有时要同时观测 n 个对象的 p 个属性，然后对这些观测数据进行整理，多元统计分析是处理这类数据的一个有用工具。

与一元统计学一样，把所研究的全部可能对象称为一个总体，对象的每一个属性称做一个变量。因此，如果同时研究一个总体的 p 个属性，就可以把这个总体看成一个 p 元变量。

从总体中随机抽取进行观测的对象叫做样本。对一个样本元的观测结果（p 个数值）可以看成是这个 p 元变量的一次取值。因此，第 i 个样本元的 p 个观测值，可表示为

$$\boldsymbol{X}_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{pi} \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

由线性代数可知，p 维向量是欧氏空间的一个点，所以也可把一样本元视为一个（样本）点。

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1 \quad \boldsymbol{X}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{X}_n) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

(6.2)式表示的是多元样本的原始观测数据。多元统计分析的主要任务就是:一是分析各观测数据之间的关系;二是推断总体的某些性质。

前已述及,一个多元总体可视为一个多元变量,由于在不同的样本元上可取不同的向量值,这就相当于对这样的多元变量赋予了随机性,因此又可称做是多元随机变量。

如果把一元随机变量分布函数的概念推广到随机向量,则 p 元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_p) = P(\xi_1 \leqslant x_1, \xi_2 \leqslant x_2, \cdots, \xi_p \leqslant x_p) \tag{6.3}$$

为 p 元随机变量分布函数,也可将其写成向量函数的形式

$$F(\boldsymbol{X}) = P(\boldsymbol{\xi} \leqslant \boldsymbol{X}) \tag{6.4}$$

同样,如果存在 p 元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_p)$,使

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_p) = \int_{-\infty}^{x_p} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(y_1, y_2, \cdots, y_p) \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_p$$

或写成

$$F(\boldsymbol{X}) = \int_{-\infty}^{\boldsymbol{X}} f(\boldsymbol{Y}) \mathrm{d}y \tag{6.5}$$

则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ 为随机向量 ξ 的分布密度函数。

如果 $F(\boldsymbol{X})$ 是 p 次连续可微的,则

$$f(\boldsymbol{X}) = \frac{\partial^p}{\partial x_1 \cdots \partial x_p} F(x_1, x_2, \cdots, x_p) \tag{6.6}$$

可见,随机向量的分布函数及密度是随机变量分布函数及密度的推广形式。相应地,如果总是假定密度函数存在,那么,总体的平均向量,即 p 元随机变量 ξ 的数学期望定义为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} E(\xi_1) \\ E(\xi_2) \\ \vdots \\ E(\xi_n) \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

其中 ξ 的第 i 个分量 ξ_i 的数学期望为

$$E(\xi_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} y_i f(y_1, y_2, \cdots, y_p) \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_p \tag{6.8}$$

作为一元总体方差的推广，p 元随机变量 $\boldsymbol{\xi}$ 的协方差矩阵定义为

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

其中对角线元素 σ_{ii} 为 $\boldsymbol{\xi}$ 的第 i 个分量 ξ_i 的方差，有

$$\sigma_{ii} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} [y_i - E(\xi_i)]^2 f(y_1, y_2, \cdots, y_p) \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_p \tag{6.10}$$

为与前几章相对照，这里可视 $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$。

非对角线元素 $\sigma_{ij}(i \neq j)$ 为 ξ 的第 i 个与第 j 个分量的协方差，有

$$\sigma_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (y_i - E(\xi_i))(y_j - E(\xi_j)) f(y_1, y_2, \cdots, y_p) \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_p \tag{6.11}$$

至于平均向量与协方差矩阵的运算性质，也就是在线性变换中的性质，这里就不再赘述，同样是一元随机变量时的推广形式。两个随机向量的协方差矩阵的计算仿上不难得到。

如果一个 p 元随机向量 $\boldsymbol{\xi}$ 的分布密度为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_p) = \frac{1}{(2\pi)^{P/2} \mid \boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}) \mid^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} [\boldsymbol{X} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{X}) [\boldsymbol{X} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})] \right\} \tag{6.12}$$

就称 ξ 服从 p 维正态分布。式中的 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$ 分别为数学期望和协方差矩阵。

二、多 元 样 本

一般地,是很难得到多元总体的各项特征数字的,只能从所观测的样本出发,通过样本来推断总体。

假定在 p 元总体 $\boldsymbol{X}$ 中,抽取 n 个样本元进行观测,得到多元样本数据为(6.2)式。不难看出,多元样本数据的每一行都是一组一元样本,因此也就可以定义相应的特征数字。例如样本平均数(均值),样本标准差,协方差以及相关系数等。

作为一元样本特征数字的直接推广,可以定义多元样本的特征数字(向量-矩阵)。下面分别予以介绍。

1. 样本平均数

$$\bar{X}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (j = 1,2,\cdots,p)$$

或

$$\bar{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{1i} \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{2i} \\ \vdots \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{pi} \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

式中:n 为样本元数,n 个样本元是 p 维空间中的 n 个点,样本均值若视为一个点,它就是 n 个样本点的重心。

2. 数据中心化

为了讨论问题方便,经常将每个观测数据减去它的平均数,得到的这个新数据在统计学中又常称为中心化数据,实际上也就是改正数,若用 $\boldsymbol{V}$ 表示中心化数据矩阵。则

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} x_{11} - \bar{X}_1 & x_{12} - \bar{X}_1 & \cdots & x_{1n} - \bar{X}_1 \\ x_{21} - \bar{X}_2 & x_{22} - \bar{X}_2 & \cdots & x_{2n} - \bar{X}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} - \bar{X}_p & x_{p2} - \bar{X}_p & \cdots & x_{pn} - \bar{X}_p \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

若写成向量-矩阵形式,则

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{X} - \bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}$$

式中的 $\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}} = (1, 1\cdots)$ 为单位列向量,又由于

$$\bar{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{n}\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}_1 \tag{6.15}$$

所以

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{X} - \frac{1}{n}\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{E} - \frac{1}{n}\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}) \tag{6.16}$$

式中:$\boldsymbol{E}$ 为单位阵。

3. 数据标准化

由于原始数据矩阵中各行数字的单位有时不同,常常给数据分析带来一些困难。因此,有时还要把数据标准化。所谓标准化数据,是将中心化数据阵中的各元素再除以该行的样本标准差而得到的数据,即指下述矩阵

$$\tilde{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_{11} - \bar{X}_1}{S_1} & \dfrac{x_{12} - \bar{X}_1}{S_1} & \cdots & \dfrac{x_{1n} - \bar{X}_1}{S_1} \\ \dfrac{x_{21} - \bar{X}_2}{S_2} & \dfrac{x_{22} - \bar{X}_2}{S_2} & \cdots & \dfrac{x_{2n} - \bar{X}_2}{S_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{x_{p1} - \bar{X}_p}{S_p} & \dfrac{x_{p2} - \bar{X}_p}{S_p} & \cdots & \dfrac{x_{pn} - \bar{X}_p}{S_p} \end{bmatrix} \tag{6.17}$$

式中：

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(x_{ij} - \overline{X}_i)^2} \qquad \begin{pmatrix} i = 1,2,\cdots,p \\ j = 1,2,\cdots,n \end{pmatrix} \tag{6.18}$$

(6.17)式也可写成如下形式：

$$\widetilde{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} S_1^{-1} & & & 0 \\ & S_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & S_p^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} - \overline{X}_1 & x_{12} - \overline{X}_1 & \cdots & x_{1n} - \overline{X}_1 \\ x_{21} - \overline{X}_2 & x_{22} - \overline{X}_2 & \cdots & x_{2n} - \overline{X}_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} - \overline{X}_p & x_{p2} - \overline{X}_p & \cdots & x_{pn} - \overline{X}_p \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

不难看出，中心化及标准化数据阵中，各行元素之和皆为 0。当样本数 n 足够大时，随机变量 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 服从 $N(0,1)$ 分布。

作为一元统计学中方差的直接推广，多元样本协方差矩阵应为

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \cdots & S_{pp} \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \tag{6.20}$$

若令

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q}$$

则

$$
\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1p} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{p1} & q_{p2} & \cdots & q_{pp} \end{bmatrix} \tag{6.21}
$$

式中：

$$
q_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (x_{ik} - \overline{X}_i)(x_{jk} - \overline{X}_j) \qquad (i \geqslant 1, j \leqslant p) \tag{6.22}
$$

显然，$\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 阵皆为非负定对称阵。(6.20)式中的对角线元素 S_{ii} 为第 i 号变量的方差；非对角线元素 $S_{ij}(i \neq j)$ 为第 i 号与第 j 号变量的协方差。(6.21)式表示的矩阵又称为离差平方和阵。

4. 相关矩阵

如果定义第 i 号变量与第 j 号变量的相关系数为

$$
r_{ij} = \frac{S_{ij}}{\sqrt{S_{ii}S_{jj}}} = \frac{q_{ij}}{\sqrt{q_{ii}q_{jj}}} \tag{6.23}
$$

那么，多元样本的相关矩阵为

$$
\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & r_{pp} \end{bmatrix} \tag{6.24}
$$

式中：对角线元素 $r_{ii} = 1$。

由于

$$
\boldsymbol{R} = \frac{1}{n}\widetilde{\boldsymbol{X}}\widetilde{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}} \tag{6.25}
$$

因此，$\boldsymbol{R}$ 也是一个非负定的对称阵。

在一元统计学中已证明过，样本平均数是总体平均数的无偏估计，$\frac{n}{n-1}s_{ij}$ 是 σ_{ij} 的无偏估计，将此结果推广到多元总体，有

若 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$ 分别为两个总体，则

$$\left.\begin{aligned}
&E(\bar{\boldsymbol{X}}) = E(\boldsymbol{X}) \\
&\frac{n}{n-1}E(\boldsymbol{S}_x) = D(\boldsymbol{X}) \\
&\frac{n}{n-1}E[\hat{\operatorname{cov}}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})] = \operatorname{cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})
\end{aligned}\right\} \tag{6.26}$$

第二节　距离的概念

在各种不同的研究课题中，经常碰到如何判断两个样本之间有多大差异的情况，因此需要有一个数值来衡量这个差异，各专业中都可以举出具有这种要求的例子。在数学中抽象出一个概念叫“距离”，用于描述样本之间的差异程度。其定义按数学语言是这样表达的：

如果第 i 号样本 X_i 和第 j 号样本 X_j 的函数 $d_{ij} = d(X_i, X_j)$ 满足

1）当且仅当 $X_i = X_j$ 时，$d_{ij} = 0$。

2）对 $\forall$ X_i、X_j，$d_{ij} \geqslant 0$。

3）$d_{ij} = d_{ji}$，就称 d_{ij} 是一种广义距离。

显然，满足上述 3 个条件的函数有多种。因此，可定义多种广义距离以适应不同需要。从数学角度往往还附加一条要求，即

4）$d_{ij} \leqslant d_{ik} + d_{kj}$ 。

这是几何学中三角不等式的推广。满足以上 4 个条件的函数就可称是一种距离。下面列举一些常用距离的例子以供参考。

1. 欧氏距离(欧几里得)

$$d_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{p}(x_{ki} - x_{kj})^2 = (\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{X}_j)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{X}_j) \tag{6.27}$$

由上式算出的 ij 两点之间的距离即为欧氏距离，它正是线性代数欧氏空间中两点

之间的距离。显然，它满足上述 4 个条件。

欧氏距离有我们所熟悉的性质：

1）平移不变性。即将每个坐标 x_{ki} 加上一个常数 c_k 后，任何两点之间的距离保持不变。

因为每个坐标加上一个常数 c_k，就相当于将空间坐标系的原点平移到 $(-c_1, -c_2, \cdots, -c_p)$ 点上，这自然不会改变两点之间的距离。据此性质可知，用原始数据或中心化数据算出的样本点之间的距离相同。

2）对正交变换的不变性。空间中的任何两点 X_i 和 X_j 施以正交变换 U 后，为

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{U}\boldsymbol{X}_i, \qquad \boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{U}\boldsymbol{X}_j \tag{6.28}$$

则

$$d(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_j) = d(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j) \tag{6.29}$$

因为正交变换仅仅是将空间的坐标轴进行一次旋转，它并不改变两点之间的相对位置。

3）若每个点的坐标都增加 c 倍，则点间的距离也增加 c 倍。因此，用标准化数据算出的欧氏距离与用原始数据算出的欧氏距离不等。

2．马氏距离（Mahalanobis）

欧氏距离虽用处很广，但也有明显的不足。例如当改变测量单位时，算出的距离数值不等。由（6.27）式也可看出，它将样本的不同属性（即各变量）之间的差别等同对待，有时不能反映实际问题的要求。因为个体间不同属性的差异对于区分个体有着不同的重要性。

若 $\boldsymbol{X}$ 是原始数据，$\boldsymbol{S}$ 是其协方差矩阵，按

$$d_{ij}^2 = (\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{X}_j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{X}_j) \tag{6.30}$$

算出的两点 $\boldsymbol{X}_i$ 和 $\boldsymbol{X}_j$ 之间的距离 d_{ij} 称为马氏距离。但它已不再是欧氏空间中两点之间的距离，而是经过某种比例变换后算得的数字而当作两点之间的距离。

在统计学中，马氏距离具有优越的性质。它们是：

1）平移不变性。

2）对任意可逆线性变换的不变性。所谓可逆线性变换是指一个可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$，对任何一个点 $\boldsymbol{X}$ 进行变换 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，而得到一个新点 $\boldsymbol{Y}$。

令 $\boldsymbol{X}$ 为中心化数据阵，若对其各点都施以 $\boldsymbol{A}$ 变换，那么变换后的数据阵为

准特征向量,即

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{u}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_p)$$

为正交阵,且使

$$\boldsymbol{U\Sigma U}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_p \end{bmatrix} \tag{6.34}$$

则称

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}) \tag{6.35}$$

为随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的主分量,称 $y_i=\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的第 i 个主分量,可见,主分量就是指综合变量 $\boldsymbol{Y}$,它是 $\boldsymbol{X}$ 的各分量的线性组合。由方差的运算性质可知

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})] = \boldsymbol{UD}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Lambda} \tag{6.36}$$

这就是说:主分量都不相关,且第 i 个主分量的方差为 λ_i;同时还可以证明,主分量的方差之和与原随机向量的方差之和相等,即

$$\sum_{i=1}^{p}\mathrm{Var}(y_i) = \sum_{i=1}^{p}\mathrm{Var}(x_i) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}) \tag{6.37}$$

由于起初已经假定了 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_p$,这就说明第一个主分量 $y_1=\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})$的方差最大,而在与第一个主分量不相关的随机变量中,y_2 具有最大的方差,依此类推。如果定义

$$\eta_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p} \qquad (i = 1,2,\cdots,p) \tag{6.38}$$

为第 i 个主分量的贡献率。不难看出，λ_i 越大，说明 y_i 对总方差 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma})$ 的贡献越大；如果 $\lambda_{r+1},\cdots,\lambda_p$ 都等于零，则主分量 $y_r+1,\cdots,y_p$ 的方差皆为零，再加之它们的均值都是零，所以这些主分量都以概率为 1 取零，则这样的主分量就可以去掉。由原来 $\boldsymbol{X}$ 是 P 维向量，若顾及主分量概念，现只需处理 r 维向量，降低了问题的维数。有时候，后面的 $p-r$ 个主分量的方差总不严格地等于零，只是近似地等于零，这在总方差中所占的比例很小，也就把它们略去了。一般地讲，应使前 r 个特征根之和在 p 个特征根总和中所占的比例达到预先给定的值。经验指出，根据讨论问题的不同，累计贡献率常取 75%～85%之间。即有

$$\frac{\sum_{i=1}^{r}\lambda_i}{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i} = 75\%(\sim 85\%) \tag{6.39}$$

在应用中，$\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为已知的情况是很少见的，多用样本的数学期望和方差来代替。因讨论的也多是样本主分量分析问题，所以凡提及主分量也多指样本主分量，而略去“样本”二字。

二、R 与 Q 分析

主分量分析是从原始观测数据（或中心化数据）出发，寻求正交变量 $\boldsymbol{U}$ 进而求得主分量 $\boldsymbol{Y}$，这样做的结果与 $\boldsymbol{X}$ 的测量单位有关。为了消除其影响。常先把观测数据标准化，即从标准化数据阵出发。考虑到标准化数据的数学期望为零这一特点，它的方差矩阵应等于原始数据的相关矩阵，即 $\boldsymbol{S}_{\tilde{X}} = \boldsymbol{R}$。仿(6.36)式，则有

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}$$

式中：$\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角线元素 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的特征根；$\boldsymbol{U}$ 的第 i 行向量是相应于 λ_i 的单位特征向量，其余公式只要将主分量分析中的方差换成相关系数，而将观测数据视为标准化数据即可。这种从标准化数据出发，或者说从相关矩阵 $\boldsymbol{R}$ 出发的主分量分析方法在许多文献中称之为 $\boldsymbol{R}$ 分析。

由于相关阵中的主对角线元素都是 1，相应有

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i = \sum_{i=1}^{p} r_{ii} = p \tag{6.40}$$

(6.38)式也变成

$$\eta_i = \frac{\lambda_i}{p} \tag{6.41}$$

前已述及,用 **R** 分析的方法可以找出综合变量 $\boldsymbol{Y}$,略去那些方差很小的主分量,达到用低维空间排列样本的目的。但有时研究的目的不是要排列样本点,而是要求排列各变量,例如某一山地,上部是典型的针叶混交林,下部是典型的阔叶混交林,中部是过渡地带。设置了几个样地,在每个样地内调查了 p 个树种的含量(可以是株数、蓄积量,或表示树种是否存在的 0,1 型数据等)。如果把每个树种的含量作为一个变量,采用 **R** 分析可得到综合变量(即综合树种)及样本排序。在这类问题中,研究者往往对相反的问题也感兴趣,即希望找出“综合样地”作为不同森林分布带的典型样地,并且希望能将树种进行排序以便得出树种习性的相互关系。**Q** 型分析就是解决这种逆向问题的一种方法。

假定对一个 p 元总体抽样了 n 个样本元,得观测数据 $\boldsymbol{X}$,为消除单位的影响,仍将原始数据标准化,得 $\underset{p\times n}{\widetilde{\boldsymbol{X}}}$。显然

$$q_{ij} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\widetilde{X}_{ki}\widetilde{X}_{kj} \qquad (i,j = 1,2,\cdots,n) \tag{6.42}$$

是第 i 号样地与第 j 号样地之间的相似系数。

令

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{Q} = \frac{1}{p}\widetilde{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{X}} \tag{6.43}$$

类似 $\boldsymbol{R}$ 分析，找到一个正交变换 $\underset{n\times n}{\boldsymbol{V}}$ 阵，把 $\boldsymbol{Q}$ 阵化为对角型矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，即

$$\boldsymbol{VQV}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_n) \tag{6.44}$$

式中：$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$。

若令

$$\boldsymbol{Y} = \tilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \tag{6.45}$$

由于

$$\frac{1}{p}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} = \frac{1}{p}\boldsymbol{V}\tilde{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{VQV}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Lambda} \tag{6.46}$$

所以，$\boldsymbol{Y}$ 中的各列向量互相正交。其中 y_i 就是第一综合样地，y_2 就是第二综合样地，等等。

同样地，可以按 λ_i 的值算出各综合样地的贡献率，选定出少数几个(如 k 个)综合样地。

有时各变量单位相一致，或由于其他原因，在做主分量分析或 Q 型分析时，未将原始数据中心化或标准化，而是直接利用 $\boldsymbol{XX}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$ 进行正交变换，将 $\boldsymbol{XX}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$ 化成对角型矩阵。由于 $\boldsymbol{XX}^{\mathrm{T}}$ 和 $\frac{1}{n}\boldsymbol{XX}^{\mathrm{T}}$ 的特征根相差常数 n 倍(同样 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$ 和 $\frac{1}{p}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$ 的特征根相差常数 p 倍)，而特征向量一样，所以不影响分析结果。但因未对数据中心化处理，其效果一般可能不如用中心化数据分析的结果。

综上所述，主分量分析可根据研究问题的目的不同，其计算步骤和内容也可以有所不同，但大致如下：

1) 列出观测数据阵 $\boldsymbol{X}$；

2) 计算样本协方差阵 $\boldsymbol{S}$ 或相关阵 $\boldsymbol{R}$；

3) 计算 $\boldsymbol{S}$ 或 $\boldsymbol{R}$ 的特征根和特征向量，求正交变换阵 $\boldsymbol{U}$；

4) 计算贡献率及累计贡献率，确定使用的主分量个数，建立主分量方程；

5) 解释各主分量意义；

6) 根据主分量方程计算各样本的主分量坐标 y_i。当维数较低时，还可根据主分量坐标 y_i 展成样本排序图。

最后指出，主分量分析只是一种基本的简化数据及样本排序方法，只使用了欧氏距离来衡量样本间差异。为适应不同的目的，还有其他的方法，如主坐标分析等，它也是一种处理数据的方法。首先是给定样本之间的某种距离。然后找出一

个坐标系(如重心坐标系)并赋予每个样本一组主坐标值,从而达到在主坐标系所决定的空间中排列样本的目的。其具体做法也与主分量分析相雷同,限于篇幅就不再赘述了。

第四节 聚类分析

在实际问题中,常要将一些东西分类,例如对物种分类,样本分类或者对性状进行分类等。聚类分析就是解决分类问题的一种数学方法,目前它已发展成一个独立的数学分支。本节主要以样本分类为例,当然也不难将其推广到其他目的的分类上去。

聚类分析所处理的问题是在分类前没有任何关于类的知识,类是分类的结果。所以许多文献也常称聚类分析为无监督分析。

分类方案大致可分两种,一种是属系统聚类方法,它是先将 n 个样本各自分成一类,共 n 类,然后根据某种距离找出“最相近”的两个类(样本),将它们合并成一类,于是变为 $n-1$ 类,逐次重复这个步骤,直到分成 k 类为止;另一种方案称为逐步聚类或称动态聚类,它是先将 n 个样本大致分成 k 类,然后按着某种原则逐步修改,一直到比较合理为止。当样本较多时,由于系统分类法计算工作量很大,即使在计算机上实现也是如此,因此本节主要介绍逐步分类时常使用的方法。

一、最小距离法(成批修改法)

假若有 n 个 p 维样本,需要分成 m 类,可采用如下步骤:

1) 初步分类。先人为地选择 m 个凝聚点,例如可随机的选择 m 个样本作为凝聚点(关于凝聚点的选法下面还要讨论),注意每个凝聚点都是 p 维空间中一个向量,每个凝聚点自成一类。然后计算每个样本与凝聚点之间的距离,将每个样本归入离它最近的凝聚点所属的那一类,这样就将全部样本分成了 m 类,并记为 $G_1^0, G_2^0, \cdots, G_m^0$。

2) 修改分类。计算各类的重心 $\bar{X}_1^0, \bar{X}_2^0, \cdots, \bar{X}_m^0$,把各类重心作为 m 个新的凝聚点,再计算每个样本与新凝聚点的距离,再将每个样本重新归入离它最近的凝聚点所决定的类,得到经第一次修改后的分类 $G_1^1, G_2^1, \cdots, G_m^1$。

3) 重复手续 2)直到样本分类不再变动。

例[6.1]:在 12 个不同产区测定某树种的平均发芽率和发芽势(略去其他指标),各数据列入表 6.1。采用欧氏距离计算样本间距,试用上述方法将产区分为两类。

表 6.1

产区号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
发芽率 X_1	0.707	0.600	0.693	0.717	0.688	0.533	0.877	0.513	0.815	0.633	0.740	0.777
发芽势 X_2	0.385	0.433	0.505	0.343	0.605	0.380	0.713	0.353	0.675	0.465	0.580	0.723

1) 首先随机取两点作为初始凝聚点,这里不妨取 G_1 类的凝聚点为 5 号地区,坐标为(0.688,0.605);G_2 类的凝聚点为 12 号地区,坐标为(0.777,0.723)。计算出各产区和两个凝聚点的距离,见表 6.2。按距离较小的原则归类,如 1 号地区与 G_1 类凝聚点的距离小,因而将其归入 G_1 类,以此造仿。

表 6.2

类	地区 / 聚点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G_1	0.688, 0.605	0.049	0.037	0.010	0.069	0	0.075	0.047	0.94	0.021	0.023	0.003	0.022
G_2	0.777, 0.723	0.119	0.115	0.055	0.148	0.026	0.177	0.010	0.207	0.004	0.087	0.022	0
	所属类	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_1	G_2

2) 根据第一次分类结果,算出 G_1 类样本(即产区)的重心坐标(即 G_1 类样本的平均发芽率和平均发芽势)和 G_2 类样本的重心坐标,计算结果列入表 6.3 中。然后再计算各样本与重心间的距离,并按较小距离归类,详见表 6.3。

表 6.3

类	地区 / 重心	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G_1	0.647, 0.450	0.008	0.002	0.005	0.016	0.026	0.018	0.122	0.027	0.079	0	0.026	0.091
G_2	0.823, 0.704	0.115	0.123	0.056	0.142	0.028	0.189	0.003	0.219	0.001	0.093	0.022	0.002
	所属类	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	G_2

由于归类结果与上一次归类结果(表 6.2)不重复,因此再做一次归类。

3) 根据第二次归类结果,再算出 G_1 和 G_2 类重心坐标,再标出各样本与本次重心间的距离,仍按较小距离归类,结果列于表 6.4 中。

由于第三次与第二次分类结果仍不相同,仍需做第四次归类,结果归于表 6.5 中。可见,第四次与第三次分类结果相同,故认为是最后分类结果。情况如下:

$G_1=\{1,2,3,4,6,8,10\}$,平均发芽率为 0.628,平均发芽势为 0.409;

$G_2=\{5,7,9,11,12\}$,平均发芽率为 0.779,平均发芽势为 0.659。

两类地区相比较,前者是种子质量较差的地区,后者是种子质量较好的地区。

上述方法的优点是计算量小,速度快,但分类结果依赖于凝聚点的选择。为使分类比较合理,要注意遵循某个原则,可参考有关文献。

表 6.4

类	地区 / 重心	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G_1	0.636, 0.433	0.007	0.001	0.008	0.015	0.032	0.013	0.136	0.022	0.091	0.001	0.032	0.104
G_2	0.802, 0.672	0.091	0.098	0.040	0.115	0.017	0.158	0.007	0.185	0	0.071	0.012	0.003
	所属类	G_1	G_1	G_1	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	G_2

表 6.5

类	地区 / 重心	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G_1	0.628, 0.409	0.007	0.001	0.013	0.012	0.042	0.010	0.154	0.016	0.106	0.003	0.042	0.121
G_2	0.779, 0.659	0.080	0.083	0.031	0.104	0.011	0.138	0.012	0.164	0.002	0.059	0.007	0.004
	所属类	G_1	G_1	G_1	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	G_2

二、爬　山　法

爬山法的聚类步骤是:

1) 定义一个分类的目标函数 Q(下文还要介绍),Q 的值由分类结果确定,Q 值越大表示分类越合理。

2) 给出初始分类。

3) 将样本依次从原分类中移至其他类。例如,若第 i 号样本原属第 k 类,将其移至第 r 类,这时目标函数 Q 将改变一个数值 $Q_{kr}^{(i)}(r=1,2,\cdots,m)$。如果 $Q_{kr}^{(i)}>0$,也就是说 Q 值增大,则表示第 i 号样本在第 r 类中比在第 k 类中更合理,在 m 个数 $Q_{k1}^{(i)},Q_{k2}^{(i)}\cdots\cdots Q_{km}^{(i)}$ 中找出最大的一个数,例如是 $Q_{kj}^{(i)}$,则

$$Q_{kj}^{(i)} = \max\{Q_{kr}^{(i)};\ r = 1,2,\cdots,m\} \tag{6.47}$$

若 $Q_{kj}^{(i)}>0$,也就是说将第 i 号样本移至第 j 类是在现有分类基础上最为合理的一种移法,因此调整一次分类,将第 i 号样本 X_i 由 G_k 类移至 G_j 类(若 $j=k$,表示不变)。

把全部样本按上述原则移完以后,得到新的分类。

4) 用新的分类当作初始分类,重复步骤 3)。如此逐步修改直到全部样本不再改变所属类别为止。因此样本不改变所属的条件是 $Q_{kj}^{(i)}=0$,所以终止修改手续的条件可写成

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{kj}^{(i)} = 0 \tag{6.48}$$

此时必有

$$j = k$$

根据目标函数选取的不同,爬山法又可分为许多种,下面介绍一种最常用的目标函数。

1. 类间平方和

根据方差分析的思想,若将全体 n 个样本分成 m 个类,则总离差平方和等于类内离差平方和加上类间离差平方和,由于总离差平方和是一个固定常数,而分类的结果总是希望类内离差平方和尽量小,类间离差平方和尽量大,于是可以把类间离差平方和作为目标函数 Q。

若设初始分类为 $G_1,\cdots,G_m$,各类样本数为 $n_1,\cdots,n_m$,各类样本平均数为 $\bar{X}_1,\cdots,\bar{X}_m$,全体总平均数为 $\bar{X}$ 。于是,类间离差平方和

$$Q = \sum_{t=1}^{m} n_t(\bar{\boldsymbol{X}}_t - \bar{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{X}}_t - \bar{\boldsymbol{X}}) \tag{6.49}$$

或

$$Q = \sum_{t=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{p} n_t(\bar{X}_{\alpha t} - \bar{X}_{\alpha})^2 \tag{6.50}$$

式中:$\bar{\boldsymbol{X}}_t^{\mathrm{T}} = (\bar{X}_{1t},\ \bar{X}_{2t},\cdots,\bar{X}_{pt})$, $\bar{\boldsymbol{X}}_\alpha^{\mathrm{T}} = (\bar{X}_1,\ \bar{X}_2,\cdots,\ \bar{X}_p)$,即 $\bar{X}_{\alpha t}(\alpha = 1,2\cdots\cdots p)$ 是 $\bar{X}_t$ 的第 α 个坐标值。

现将原来属 G_k 的第 i 号样本移到 G_r 中去,考察 Q 值的变化 $Q_{kr}^{(i)}$。

这个移动只涉及 k、r 两类,其他类不变且总平均数 $\bar{X}$ 也不变。若移动后的 k、r 两类的平均数分别记为 $\bar{y}_k$ 和 $\bar{y}_r$,则

$$\begin{aligned} Q_{kr}(i) = {} & (n_k - 1)(\bar{y}_k - \bar{X})^{\mathrm{T}}(\bar{y}_k - \bar{X}) + (n_r + 1)(\bar{y}_r - \bar{X})^{\mathrm{T}}(\bar{y}_r - \bar{X}) \\ & - n_k(\bar{X}_k - \bar{X})^{\mathrm{T}}(\bar{X}_k - \bar{X}) - n_r(\bar{X}_r - \bar{X})^{\mathrm{T}}(\bar{X}_r - \bar{X}) \end{aligned} \tag{6.51}$$

由于

$$\bar{y}_k = \frac{n_k\bar{X}_k - X_i}{n_k - 1}, \quad \bar{y}_r = \frac{n_r\bar{X}_r + X_i}{n_r + 1}$$

并记原第 k 类与 r 类样本(向量)之和各为

$$g_k = n_k\bar{X}_k, \quad g_r = n_r\bar{X}_r$$

展开(6.51)式,合并同类项并代入上述记号,得

$$Q_{kr}(i) = \frac{(g_k - X_i)^{\mathrm{T}}(g_k - X_i)}{n_k - 1} + \frac{(g_r + X_i)^{\mathrm{T}}(g_r + X_i)}{n_r + 1} - \frac{g_k^{\mathrm{T}}g_k}{n_k} - \frac{g_r^{\mathrm{T}}g_r}{n_r} \tag{6.52}$$

该式即为实际计算时采用的递推公式。

综上所述,采用类间离差平方和爬山法时,实际计算步骤为

1) 任给一个初始分类 $G_1, \cdots, G_m$,计算各类样本数 $n_1, \cdots, n_m$ 和各类样本(向量)的合计数 $g_1, \cdots, g_m$;

2) 将样本 $i = 1, 2, \cdots, n$ 依次输入,若第 i 号样本 X_i 原属 G_k(当然 k 和 i 有关),按(6.51)式计算 $Q_{k1}^{(i)}, \cdots, Q_{km}^{(i)}$,找出最大数 $Q_{kj}^{(i)}$ 来,将第 i 号样本归入第 j 类,这时

$$\left.\begin{aligned} n_k &\Leftarrow n_k - 1 \\ n_j &\Leftarrow n_j + 1 \end{aligned}\right\} \tag{6.53}$$

式中:⇐表示赋值。即新类的 n_k 等于原类的 $n_k - 1$,新类的 n_j 等于原类的 $n_j + 1$,且

$$\left.\begin{aligned} g_k &\Leftarrow g_k - X_i \\ g_j &\Leftarrow g_j + X_i \end{aligned}\right\} \tag{6.54}$$

除 k、j 两类外,其余类的 n_r、g_r($r = 1, 2, \cdots, m; r \neq j, r \neq k$)不变。

全部样本输送完后,计算目标函数总的改变值,即

$$\Delta Q = \sum_{i=1}^{n} Q_{kj}{}^{(i)} \tag{6.55}$$

3) 由上述过程可得一个新的分类，再将此新分类作为初始分类重复 2)直到 $\Delta Q=0$ 为止。

2．分类数

以上介绍的方法，都事先假定了分类数目为 m，但有时很难确定 m 究竟取多少才比较合理。采用类的分解与合并的方法可以改变类的数目，这里只介绍一种统计方法。这种方法基于总体是由 m 个正态分布混合而成，分类的目的就是要把属于不同正态分布的样本分开。由统计检验的理论可知，如果 G_1 和 G_2 是欲产生的两个类，样本个数分别为 n_1 和 $n_2(n_1+n_2=n)$，重心是 $\bar{\boldsymbol{X}}_1$ 和 $\bar{\boldsymbol{X}}_2$，两个类内的离差阵分别为 $\boldsymbol{Q}_1$ 和 $\boldsymbol{Q}_2$。如果两个类皆为 p 维正态分布，且协方差阵相同，则用来检验两类平均值(重心)是否显著的统计量为

$$F=\frac{n_1+n_2-p-1}{p}\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}(\bar{\boldsymbol{X}}_1-\bar{\boldsymbol{X}}_2)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2)^{-1}(\bar{X}_1-\bar{X}_2) \tag{6.56}$$

F 是服从自由度为(p,n_1+n_2-p-1)的 F 分布的随机变量。于是，按事先给定的信度 α，查出临界值 F_α，进行判断，当 $F>F_\alpha$ 时，则认为 G_1、G_2 来自两个总体，应分成两类；反之，认为 G_1、G_2 来自同一总体，应合并成一类。

实际进行分类时，可用分解的方法。先令全部样本属于 G_1 类，然后逐次输入一个样本 $i=1,2,\cdots n$ 到 G_2 类，算出一个 $F(i)$值，将 $F(1),\cdots,F(n)$中最大的一个归入 G_2 类，再将 G_1 类中所剩样本逐次送至 G_2，同样根据最大的 F 值确定应该划归 G_2 类的第二个样本，如此下去。

令 $F^{(1)},F^{(2)},\cdots$，是 G_2 类中含有被划入的 1 个样本、2 个样本……的 F 值，其中必有一个是最大的，例如不妨为 $F^{(j)}$最大。如果 $F^{(j)}>F_\alpha$ 时，就将全部样本分成二类，否则就不分类。

如果先分成了两类，再用同样的方法分解 G_1 和 G_2 类，一直类似的做下去即可确定出最后分类的数目。

当然也可采用合并的方法。先估计分类的上限数目 k，按某种方法分类之后，逐一用 F 统计量检验两类均值之间的差异是否显著，进而做出统计判断。

前面介绍的分类方法，都是将样本等同看待的，即任何两个样本都有可能分到同一类中去。有时，情况不是这样，样本带有次序性，只能按次序把全部样本分成几段，像这种不能打乱样本次序的分类，常称为有序样本的分类。限于篇幅不再赘述。

最后指出，目前设计出的形形色色的聚类方法，都是在某种条件下达到局部最优，很难说哪种方法更好一些。往往是将几种方法同时使用，通过比较分类结果，选择出一种比较符合本专业要求的结果来。

第五节　多元线性回归

为了与统计学中常用的多元回归不至于相混，首先声明，本节介绍的多元回归是指多个因变量与多个自变量之间的回归，而不是一元统计中一个因变量与多个自变量之间的回归关系。也就是说，因变量本身也是多维的。实际应用中常要考查这种关系，如根据 q 个测树因子(自变量)同时估计 p 个树种的积蓄量(因变量)，根据 q 个自然条件因子预估 p 种作物产量，或者根据今年的气象条件预估明年的各种气象要素等等都属这类问题。

一、数学模型与估计

设 p 元因变量 $\boldsymbol{Y}$(随机)与 q 元自变量 $\boldsymbol{X}$(随机或非)之间存在线性回归关系，有

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = b_{10} + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1q}x_q + \varepsilon_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_p = b_{p0} + b_{p1}x_1 + b_{p2}x_2 + \cdots + b_{pq}x_q + \varepsilon_p \end{array}\right\} \tag{6.57}$$

写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{b}_0 \quad \boldsymbol{B}]\begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{X} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{6.58}$$

与一元回归一样，把略去误差项 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 后的关系式

$$\boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{b}_0 \quad \boldsymbol{B}]\begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{X} \end{bmatrix} \tag{6.59}$$

或

$$Y_j = b_{j0} + b_{j1}x_1 + b_{j2}x_2 + \cdots + b_{jq}x_q \qquad (j = 1, 2, \cdots, p) \tag{6.60}$$

称为 $\boldsymbol{Y}$ 对 $\boldsymbol{X}$ 的线性回归方程式。同样地，方程式中的系数 $b_{jk}(k = 1, 2, \cdots, q)$ 称

为回归系数。

为了计算回归系数 b_{jk}，需抽取样本，若抽取了 n 个，则因变量与自变量的观测数据列向量为

$$\boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{Y}_1, \cdots, \boldsymbol{Y}_n]$$

$$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_q]$$

将每个样本的观测值 Y_i 和 X_i 代入(6.58)式，得

$$\underset{p\times n}{\boldsymbol{Y}} = \underset{p\times(q+1)}{[\boldsymbol{b}_0 \quad \boldsymbol{B}]} \underset{(q+1)\times n}{\begin{bmatrix} \boldsymbol{1}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{X} \end{bmatrix}} + \underset{p\times n}{\boldsymbol{E}} \tag{6.61}$$

式中：

$$\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}} = \overbrace{[1, \cdots, 1]}^{n\text{ 个}}; \quad \boldsymbol{E} = [E_1, \cdots, E_n]$$

根据最小二乘估计准则，这里不加证明地给出：

若 $\bar{\boldsymbol{X}}$、$\bar{\boldsymbol{Y}}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的平均数，$\tilde{\boldsymbol{X}}$、$\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的中心化数据，则进行回归系数估计的正规方程式为

$$\underset{q\times q}{\tilde{\boldsymbol{X}}\tilde{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}}\,\underset{q\times p}{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}} = \underset{q\times p}{\tilde{\boldsymbol{X}}\tilde{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}} \tag{6.62}$$

及

$$\boldsymbol{b}_0 = \bar{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{X}} \tag{6.63}$$

由(6.62)、(6.63)两式所决定的 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{b}_0$ 即为线性模型(6.61)式的最小二乘估计，也就是回归方程(6.59)式的解。

由(6.62)式可以看出，它表示的是 q 组 p 维线性方程组，按着矩阵相等的定义，两边任何相应的一列都应该相等。与(6.57)式相比较，多元回归中第 j 个方程式也就是(6.60)式所表达的通式，只不过此时 j 取的是某一定值。

同样地，由(6.63)式可以看出，$\boldsymbol{b}_0$ 的第 j 个元素为

$$b_{j0} = \bar{Y}_j - (b_{j1}\bar{X}_1 + b_{j2}\bar{X}_2 + \cdots + b_{jq}\bar{X}_q)$$

其正是 Y_j 对 $\boldsymbol{X}$ 的“一对多”回归系数中的常数项。由此可见，$\boldsymbol{p}$ 元变量 $\boldsymbol{Y}$ 对 $\boldsymbol{q}$ 元变量 $\boldsymbol{X}$ 的“多对多”回归问题，可以化为 p 个一元变量 $Y_j(j=1,2,\cdots,p)$ 对 $\boldsymbol{X}$ 的“一对多”回归问题。若 Y_j 对 $\boldsymbol{X}$ 回归问题的解是 $b_{j0}, b_{j1}, \cdots, b_{jq}$，则矩阵

$$\begin{bmatrix} b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ b_{20} & b_{21} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p0} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{b}_0 \quad \boldsymbol{B}]$$

即为“多对多”回归方程(6.59)的解。

为了简化符号，不妨记各离差阵为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{L}_{XX} &= \tilde{\boldsymbol{X}}\tilde{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{L}_{XY} &= \tilde{\boldsymbol{X}}\tilde{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{L}_{YX}^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\} \tag{6.64}$$

于是求解回归系数的正规方程可写为

$$\boldsymbol{L}_{XX}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{L}_{XY} \tag{6.65}$$

及

$$\boldsymbol{b}_0 = \bar{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{X}}$$

剩余离差距阵 $\boldsymbol{Q}$ 以及剩余协方差矩阵 $\boldsymbol{S}$ 为

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{Y} - [\boldsymbol{b}_0 \quad \boldsymbol{B}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{X}\end{bmatrix}\right)\left(\boldsymbol{Y} - [\boldsymbol{b}_0 \quad \boldsymbol{B}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{X}\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}$$

由于

$$\boldsymbol{Y} - [\boldsymbol{b}_0 \quad \boldsymbol{B}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}} \\ \\ \boldsymbol{X}\end{bmatrix} = \boldsymbol{Y}(1 - \frac{1}{n}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}) - \boldsymbol{BX}(1 - \frac{1}{n}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}) = \widetilde{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{X}}$$

所以

$$\boldsymbol{Q} = (\widetilde{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{X}})(\widetilde{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}} = \widetilde{\boldsymbol{Y}}\widetilde{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{X}}\widetilde{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}$$

或

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{L}_{YY} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{L}_{XY} \tag{6.66}$$

且

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{n - q - 1}\boldsymbol{Q} \tag{6.67}$$

如同一元回归一样，回归系数的显著性检验也是必须的。从根本上讲，应该在实践中去检验、分析经验回归方程是否与问题本身的专业理论相吻合；若用于预测，其效果又是如何等。当然，利用统计检验来判断经验回归方程的适用性也是很重要的一个手段，在此就不再介绍了，读者可自学或参考某些文献。

二、应 用 例

在遥感测量的应用中，常要进行坐标变换。例如要把某个林场的界线转绘到卫星扫描图上去。由地形图很容易确定林场界线上各点的地理坐标(X, Y)，而卫星扫描图上各点的坐标是扫描的行列号(N, M)。若忽略地面高程和地球曲率等误差，那么(N, M)和(X, Y)之间是线性关系，即存在一个线性变换，使

$$\left.\begin{aligned} N &= b_{10} + b_{11}X + b_{12}Y \\ M &= b_{20} + b_{21}X + b_{22}Y \end{aligned}\right\} \tag{6.68}$$

只要确定了常数 $b_{ij}(i=1,2;j=0,1,2)$，就建立了坐标变换公式，也就很容易地将林场界线转绘到卫星扫描图上。

(6.68)式是一个多对多的回归方程,为了确定回归系数和回归常数,需要抽取一些样本,这些样本点在测绘学中称为控制点。精确测定这些样本(控制点)的地理坐标和扫描行列号,由此就可以算出(6.68)式中的各项系数,即建立了地面坐标与卫星扫描图坐标变换的公式。

由测量实践可知,控制点的数目应大于3。反映误差的量为剩余协方差 S,这里 $q=2$,也只有当 $n>3$ 时(6.67)式才有意义。

假定观测了9个控制点,控制点坐标列入了表6.6中。

表6.6

点号		1	2	3	4	5	6	7	8	9
地理	X	100.38	99.70	92.30	87.60	87.17	88.30	92.75	100.60	90.05
	Y	53.24	51.50	50.50	52.40	59.00	59.70	65.20	62.40	53.68
行列	N	226	250	281	272	194	180	105	115	250
	M	644	640	517	425	385	401	448	599	462

由表6.6算出正规方程式 $\boldsymbol{L}_{XX}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{L}_{XY}$ 的系数阵 $\boldsymbol{L}_{XX}$ 及 $\boldsymbol{L}_{XY}$,列入表6.7中。

表6.7

	$\boldsymbol{L}_{XX}$		$\boldsymbol{L}_{XY}$	
	X	Y	N	M
X	251.228 022	−9.668 911	−574.395 555	4402.753 334
Y	−9.668 911	223.293 956	−2656.822 22	−1327.326 666

$$\bar{X}=93.205\ 556,\quad \bar{N}=208.111\ 111$$

$$\bar{Y}=56.402\ 222,\quad \bar{M}=502.333\ 333$$

于是

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{L}_{XX}^{-1}\boldsymbol{L}_{XY}=\begin{bmatrix}-2.748\ 858 & 17.325\ 026\\ -12.017\ 346 & -5.194\ 106\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_0=\begin{bmatrix}\bar{N}\\ \bar{M}\end{bmatrix}-\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}\bar{X}\\ \bar{Y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1142.125\\ -819.496\end{bmatrix}$$

最后得坐标变换公式为

$$\left.\begin{aligned} N &= 1142.125 - 2.748\,858X - 12.017\,346Y \\ M &= -819.496 + 17.325\,026X - 5.194\,106Y \end{aligned}\right\} \tag{6.69}$$

剩余离差及剩余协方差阵分别为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Q} &= \begin{bmatrix} 8.00 & -2.73 \\ -2.73 & 3.91 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{S} &= \begin{bmatrix} 1.333 & -0.455 \\ -0.455 & 0.652 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{6.70}$$

(6.70)式中的第二式中 $S_{11}=1.333$ 及 $S_{22}=0.652$,分别是 N 和 M 对 X 和 Y 的回归剩余方差,因而在一定程度上描述了 N 和 M 值的误差。顺便指出,多元回归的应用非常广泛,限于篇幅在此省略。

第六节　多元统计检验

利用观测数据(子样)对总体的某种性质所提出的“假设”进行统计检验的问题在一元统计分析中已接触过。它依据的是概率论中的实际判断原理,即小概率事件在一次实验中实际上被看做是不可能发生的。假设检验中核心的问题是寻找恰当的统计量及其分布,或者至少对于给定的 α 找出满足 $p(|U|\geqslant u_0)=\alpha$ 的临界值 u_0。本节分别就各种常见情况,介绍如何构造统计量和进行计算的方法。

一、两总体均值向量的假设检验

1. 协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 已知时,检验 $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}_0$

若在 p 维正态总体中抽取 n 个样本,得样本资料为 $\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_n]$,样本均值为 $\bar{\boldsymbol{X}}$。已知总体协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$。欲检验总体平均值(向量)$\boldsymbol{\mu}$ 是否等于 $\boldsymbol{\mu}_0$。

首先假定 $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}_0$。如果假定正确,则

$$\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}_0 \sim N_P(\boldsymbol{0},\frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma})$$

考虑到多元正态分布与 χ^2 分布的关系，则二次型

$$(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}_0)^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma}\right)^{-1}(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}_0)\sim\chi^2(p) \tag{6.71}$$

于是，得检验方法

原假设 H_0: $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}_0$

构造统计量： $T_0^2=n(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}_0)\sim\chi^2(p)$

给定信度 α，由 χ^2 分布表查出 $\chi_\alpha^2(p)$。

进行判断：当 $T_0^2\geqslant\chi_\alpha^2(p)$时，拒绝原假设；反之，接受原假设。

由于一般很少有 $\boldsymbol{\Sigma}$ 已知的情况，故实际上也很少用到这种检验。重要的是下述几种情况。

2. 协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 未知时，检验 $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}_0$

若在 p 维总体 $\boldsymbol{X}$ 中，抽取 n 个样本，得样本资料 $\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_n]$，并计算得样本均值为 $\bar{\boldsymbol{X}}$，样本离差(平方和)矩阵为 $\boldsymbol{Q}$。如果 $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}_0$，则统计量

$$\frac{n(n-p)}{p}(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1}(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}_0)\sim F(p,n-p) \tag{6.72}$$

于是可类似上述得到检验方法，此处省略，仅给出一个算例。

[例 6.2]：为判断某人工林平均直径与平均树高，测定了 11 株样本，观测数据列入了表 6.8 中。

表 6.8

树 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
直径 X_1	8.0	8.2	8.5	7.3	7.6	7.0	6.7	6.8	8.9	9.2	9.0
树高 X_2	9.2	9.5	9.5	9.0	8.8	8.5	8.4	8.4	9.3	9.5	9.0

一般地认为，人工同龄林中，可假定直径与树高服从正态分布。现欲判断此林龄的平均直径 $\bar{D}=8\text{cm}$，平均树高 $\bar{H}=8.8\text{m}$ 是否正确。检验方法如下：

作零假设 H_0: $(\bar{D}=8,\bar{H}=8.8)\Rightarrow\boldsymbol{\mu}_0$

为计算统计量 F，先计算出 $\boldsymbol{Q}$ 及 $\boldsymbol{Q}^{-1}$，$\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}_0$，将它们列入表 6.9 及表 6.10 中。

表 6.9

离　差 Q	直　径	树　高	均　值 $\bar{X}$	$\bar{X}-\mu_0$
直　径	8.262	3.308	7.93	-0.07
树　高	3.308	1.889	9.01	0.21

表 6.10

Q^{-1}	直　径	树　高
直　径	0.4050	-0.7092
树　高	-0.7092	1.7716

利用(6.72)式计算统计量 F 值,有

$$F = \frac{(11-2)\times 11}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} q_{ij}X_iX_j = 4.998$$

若取信度 $\alpha = 0.05$,查 F 分布表得 $F_{0.05}(2,9)=4.26$,由于 $F > F_\alpha$,拒绝原假设。即不能认为该林平均直径为 8cm,平均树高为 8.8m。

3. 协方差矩阵相等时,检验 $\boldsymbol{\mu}_1=\boldsymbol{\mu}_2$

若在两个 p 维正态总体 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{X}^{(2)}$ 中,分别抽取 n_1 和 n_2 个样本,得样本资料 $\boldsymbol{X}^{(1)}=[\boldsymbol{X}_1{}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{X}_{n_1}{}^{1}]$ 和 $\boldsymbol{X}^{(2)}=[\boldsymbol{X}_1{}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{X}_{n_2}{}^{(2)}]$。假定两总体协方差阵相同,希望根据样本资料推断两总体均值 $\boldsymbol{\mu}_1=\boldsymbol{\mu}_2$。

如果 $\boldsymbol{\mu}_1=\boldsymbol{\mu}_2$,说明两组样本来自同一总体。若用 $\bar{\boldsymbol{X}}^{(1)}$、$\bar{\boldsymbol{X}}^{(2)}$ 表示两组样本的均值,则 $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{X}}^{(1)}-\bar{\boldsymbol{X}}^{(2)})=\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_2=0$,又因为 $\bar{\boldsymbol{X}}^{(1)}$ 与 $\bar{\boldsymbol{X}}^{(2)}$ 相互独立,所以

$$D(\bar{\boldsymbol{X}}^{(1)}-\bar{\boldsymbol{X}}^{(2)}) = D(\bar{\boldsymbol{X}}^{(1)})+D(\bar{\boldsymbol{X}}^{(2)}) = \frac{1}{n_1}\boldsymbol{\Sigma}+\frac{1}{n_2}\boldsymbol{\Sigma} = \frac{n_1+n_2}{n_1n_2}\boldsymbol{\Sigma}$$

即有

$$\bar{\boldsymbol{X}}^{(1)}-\bar{\boldsymbol{X}}^{(2)} \sim N_P(\boldsymbol{0},\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}\boldsymbol{\Sigma}) \tag{6.73}$$

若将 $\boldsymbol{Q}_1$ 和 $\boldsymbol{Q}_2$ 记为两组样本的离差(平方和)矩阵,则 $\boldsymbol{Q}_1\sim W_P(n_1-1,\boldsymbol{\Sigma})$,$\boldsymbol{Q}_2\sim W_P(n_2-1,\boldsymbol{\Sigma})$且相互独立,则有

$$\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2 \sim W_P(n_1+n_2-2,\boldsymbol{\Sigma}) \tag{6.74}$$

且 $\bar{X}^{(1)}$、$\bar{X}^{(2)}$、Q_1、Q_2、Q_1+Q_2 均相互独立，按 T^2 统计量定义，则

$$T^2 = \frac{n_1 n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}(\bar{X}^{(1)}-\bar{X}^{(2)})^{\mathrm{T}} W^{-1}(\bar{X}^{(1)}-\bar{X}^{(2)}) \sim T^2(p, n_1+n_2-2) \tag{6.75}$$

于是

$$\frac{n_1 n_2+(n_1+n_2-p-1)}{(n_1+n_2)p}(\bar{X}^{(1)}-\bar{X}^{(2)})^{\mathrm{T}}(Q_1+Q_2)^{-1}(\bar{X}^{(1)}-\bar{X}^{(2)}) \sim F(p, n_1+n_2-p-1) \tag{6.76}$$

得到检验方法是，作零假设

$$H_0:\quad \mu_1 = \mu_2$$

统计量为： $F = \dfrac{n_1 n_2+(n_1+n_2-p-1)}{(n_1+n_2)p}(\bar{X}^{(1)}-\bar{X}^{(2)})^{\mathrm{T}}(Q_1+Q_2)^{-1}(\bar{X}^{(1)}-\bar{X}^{(2)})$。后面的步骤与前述方法完全雷同，在此从略。

4．均值向量内部结构的检验

多元统计检验还有一种特殊问题，就是均值向量的各分量之间是否有某种线性关系的检查。

设 $\boldsymbol{X}$ 是 p 维正态总体，总体均值向量 $\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}=[\mu_1,\cdots,\mu_p]$，要同时检验各分量之间是否满足关系

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}\mu_1,\cdots,a_{1p}\mu_p = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{q1}\mu_1,\cdots,a_{qp}\mu_p = b_q \end{array}\right\} \tag{6.77}$$

式中：a_{ij}、b_j 是已知的待检关系中的参数。

将上式写成矩阵形式为

$$A\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{b} \tag{6.78}$$

为检验(6.78)式是否成立,测定了 n 个样本 $\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_n$,其均值向量为 $\bar{\boldsymbol{X}}$,考虑随机变量

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

若 $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$,则 $\boldsymbol{Y} \sim N_p(\boldsymbol{A\mu}, \boldsymbol{A\Sigma A}^{\mathrm{T}})$。显然,$\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{AX}_1, \cdots, \boldsymbol{Y}_n = \boldsymbol{AX}_n$,相当于是由 q 维正态总体 $\boldsymbol{Y}$ 中抽出的 n 个样本,且相互独立,那么

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{A}\mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{A\mu} = \boldsymbol{b} \tag{6.79}$$

于是,问题化为本节上述 2 中所考虑的情况,将相应于 $\boldsymbol{Y}$ 的符号式代入(6.72)式,得

$$F = \frac{n(n-q)}{q}(\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AQA}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{b}) \sim F(q, n-q) \tag{6.80}$$

按着通常的检验步骤,即可达到目的。实际上,这是一种检查线性假设的统计检验方法。

二、协方差矩阵的假设检验

多元统计中仍有方差齐次性的检验问题,拟分 3 种情况予以介绍。之前,先给出一重要概念作为预备知识。

1. 最大似然比

如果 p 维随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的分布密度为 $f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\theta})$,其中 $\boldsymbol{\theta}$ 为待估参数向量。为估计参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的值,可抽取 n 个样本 $X_i(i = 1, 2, \cdots, n)$。根据最大似然估计准则,若 $\boldsymbol{X} \sim N_P(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$,则参数 $\boldsymbol{\theta}$ 就是 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$,样本均值向量及样本协方差 $\boldsymbol{S}$ 就是 $\boldsymbol{\mu}$ 与 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的极大似然估计。

在假设检验中,常要处理这样的情况:即假定参数 $\boldsymbol{\mu}$ 或(和)$\boldsymbol{\Sigma}$ 满足某种关系,实际上是对 $\boldsymbol{\mu}$ 或(和)$\boldsymbol{\Sigma}$ 做了某种限制。记这种限制(或关系或条件)为 ω;用符号 $\boldsymbol{\theta} \in \omega$ 来表示参数满足条件;并记 F_ω 为在条件 ω 下的最大条件分布密度,相应地未加条件的最大分布密度记为 F_Ω。

一般地讲,$F_\omega \leqslant F_\Omega$,又由于分布函数总是大于或等于零的,所以必有下式成

立,即

$$0 \leqslant F_\omega \leqslant F_\Omega \tag{6.81}$$

可以这样考虑,在统计检验中如果原假设正确,即条件 ω 正确,那么等于未加限制,因此 $F_\omega = F_\Omega$。反之,$F_\omega < F_\Omega$。且 F_ω 越小,说明假设越不正确。因此,可用

$$\lambda_\omega = \frac{F_\omega}{F_\Omega} \tag{6.82}$$

来衡量假设的正确程度。并将 λ_ω 称为最大似然比,只要选定一个标准 λ_0,当 $\lambda_\omega \leqslant \lambda_0$ 时,就可以拒绝原假设,反之亦然。称这种假设检验的方法为最大似然比法。

要正确地定出标准,需知 λ_ω 的分布及 λ_ω 的计算公式,下面再做进一步的讨论。

2. 检验 $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0$

设样本 $X_1, \cdots, X_n$ 来自总体 $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$,要检验

H_0: $\quad \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0$

其中:$\boldsymbol{\Sigma}_0$ 是已知的一个正定矩阵。

$\boldsymbol{X}$ 的联合分布密度为

$$F(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{pn}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})\right\}$$

若无限制时,即 $\boldsymbol{\mu} = \bar{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{S}$(样本协方差),则 $F(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$的极值为

$$F_\Omega = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{pn}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X} - \bar{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S}^{-1} (\boldsymbol{X} - \bar{\boldsymbol{X}})\right\} \tag{6.83}$$

若限制 ω 为 $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0$,而 $\boldsymbol{\mu}$ 自由不加限制,于是在 $\boldsymbol{\mu} = \bar{\boldsymbol{X}}$ 时,$F(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$的限制极值为

$$F_\omega = F(\bar{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{\Sigma}_0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{pn}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X} - \bar{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{X} - \bar{\boldsymbol{X}})\right\} \tag{6.84}$$

根据线性代数的理论可知,若 $\tilde{\boldsymbol{X}}_i$ 是已经中心化了的样本数据,则对任何一个

$p\times p$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，有

$$\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\boldsymbol{X}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{X}}_i = n\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{AS}) = n\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{SA}) \tag{6.85}$$

将(6.85)式代入(6.83)，(6.84)两式，得

$$\left.\begin{aligned} F_{\Omega} &= (2\pi)^{-\frac{pn}{2}}|\boldsymbol{S}|^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{n}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{SS}^{-1})\right\} \\ \text{或}\qquad F_{\Omega} &= (2\pi)^{-\frac{pn}{2}}|\boldsymbol{S}|^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{np}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{6.86}$$

及

$$F_{\omega} = (2\pi)^{-\frac{pn}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}_0|^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{n}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{S\Sigma}_0^{-1})\right\} \tag{6.87}$$

为了与后面提到的似然比相区别，记 $\lambda_1=\dfrac{F_{\omega}}{F_{\Omega}}$。于是

$$-2\ln\lambda_1 = n\left[\mathrm{tr}(\boldsymbol{S\Sigma}_0^{-1}) - \ln|\boldsymbol{S\Sigma}_0^{-1}| - p\right] \tag{6.88}$$

该式即为检验，$\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{\Sigma}_0$ 的最大似然比统计量 λ_1。

由于 $0\leqslant\lambda_1\leqslant1$，所以 $0\leqslant-2\ln\lambda_1\leqslant\infty$。$\lambda_1$ 越小，$-2\ln\lambda_1$ 越大。因此，要寻找的关于 $\lambda_{\omega}\leqslant\lambda_0$ 时拒绝原假设的规则，至此又可以改成 $-2\ln\lambda_1\geqslant$常数时拒绝原假设。为确定出这项判别，需算出 $-2\ln\lambda_1$ 的分布。事实上，有文献证明，当 n 值较大时，认为

$$-2\ln\lambda_1 \sim \chi^2\left[\frac{p(p+1)}{2}\right] \tag{6.89}$$

这样，就可按信度 α 查出临界值 χ^2_{α} 来，当 $-2\ln\lambda_1\geqslant\chi^2_{\alpha}$ 时拒绝原假设。

当 n 值较小时，用总体方差的无偏估计值 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}=\dfrac{n}{n-1}\boldsymbol{S}$ 来代替样本方差 $\boldsymbol{S}$，自由度也由 $n-1$ 代替 n，则(6.88)式可写为

$$L = (n-1)\left[\mathrm{tr}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\right] - \ln|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}| - p] \tag{6.90}$$

人们已经算出了 L 的近似分布，这里也选附在本教材后。按信度 α 可查出 $L_\alpha(p, n-1)$ 的值，当 $L \geqslant L_\alpha$ 时拒绝原假设；反之亦成立。

3．检验 $\boldsymbol{\Sigma}^{(1)} = \boldsymbol{\Sigma}^{(2)} = \cdots = \boldsymbol{\Sigma}^{(k)}$

若 k 个总体分别服从 $N_p(\boldsymbol{\mu}^{(j)}, \boldsymbol{\Sigma}^{(j)})(j=1,2,\cdots,k)$，从中各抽出 $n_1, \cdots, n_k$ 个样本 $(n = n_1 + \cdots + n_k)$。若检验各总体协方差矩阵是否相等，仍可采用最大似然比法。用 $\boldsymbol{S}^{(j)}$、$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(j)}$ 分别代表第 j 总体的样本协方差与总体协方差的无偏估计值。则无限制的似然函数的极值为

$$F_\Omega = (2\pi)^{-\frac{pn}{2}} \prod_{j=1}^{k} |\boldsymbol{S}^{(j)}|^{-\frac{n_j}{2}} \exp\left(-\frac{pn}{2}\right) \tag{6.91}$$

在限制 $\boldsymbol{\Sigma}^{(1)} = \boldsymbol{\Sigma}^{(2)} = \cdots = \boldsymbol{\Sigma}^{(k)}$ 之下，似然函数的最大值为

$$F_\omega = (2\pi)^{-\frac{pn}{2}} |\boldsymbol{S}|^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{pn}{2}\right) \tag{6.92}$$

式中：$\boldsymbol{S} = \frac{1}{n}(n_1\boldsymbol{S}^{(1)} + n_2\boldsymbol{S}^{(2)} + \cdots + n_k\boldsymbol{S}^{(k)})$。
于是

$$\lambda_3 = \frac{|\boldsymbol{S}|^{-\frac{n}{2}}}{\prod |\boldsymbol{S}^{(j)}|^{-\frac{n_j}{2}}} \tag{6.93}$$

Bartlett 建议将(6.93)式中的 $\boldsymbol{S}$ 及 $\boldsymbol{S}^{(j)}$ 换成 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ 及 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(j)}$，相应地 n 和 n_j 分别换成 $n-k$ 及 $n_j - 1$。这样，取 -2 倍对数后可将(6.93)式改写成

$$M = -2\ln\lambda_3 = (n-k)\ln|Q_0/(n-k)| - \sum_{j=1}^{k}(n_j - 1)\ln|Q_j/(n_j - 1)| \tag{6.94}$$

式中：Q_j 为第 j 总体的样本离差(平方和)阵；$Q_0 = \sum_{j=1}^{k} Q_j$。

Korin 算出了 M 分布表，也将其附在书后。可根据 3 个参数来查找 $M(p, v, k)$，其中：p 是随机向量的维数；$v = n - k$ 是总自由度；k 是要检验的总体个数。

当 n 较大时，Box 算得 M 的近似分布，有

$$(1-d)M \sim \chi^2\left[\frac{1}{2}p(p+1)(k-1)\right] \tag{6.95}$$

式中：

$$d = \begin{cases} \dfrac{2p^2+3p-1}{6(p+1)(k-1)}\left\{\sum\limits_{j=1}\dfrac{1}{n_j-1}-\dfrac{1}{n-k}\right\} & n_j \text{ 不必相等} \\ \dfrac{(2p^2+3p-1)(k+1)}{6(p+1)k(n-1)} & \text{各 } n_j \text{ 相等} \end{cases} \tag{6.96}$$

至此，得到检验 k 个总体协方差矩阵是否相等的办法。做出原假设 H_0 之后，用(6.94)式算出统计量的数值，根据给定的信度，找取 M 分布表或 χ^2 分布表。当 $M \geqslant M_\alpha(p,n-k,k)$ 或 $\chi_\alpha^2\left[\frac{1}{2}-p(p+1)(k-1)\right]$时，则拒绝原假设。

4. 检验 $\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}=\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}=\cdots=\boldsymbol{\Sigma}^{(k)}, \boldsymbol{\mu}^{(1)}=\boldsymbol{\mu}^{(2)}=\cdots=\boldsymbol{\mu}^{(k)}$

有时需要判断 k 个总体是否相同，这就要对多个协方差矩阵和均值向量同时检验。仍用最大似然比法，将 n_j 换成 n_j-1 后，得统计量

$$\lambda_4 = \frac{n^{\frac{p(n-k)}{2}}\prod\limits_{j=1}^{k}|Q^{(j)}|^{\frac{n_j-1}{2}}}{|Q|^{\frac{n-k}{2}}\prod\limits_{j=1}^{k}n_j^{\frac{p(n_j-1)}{2}}} \tag{6.97}$$

式中：n_j 仍为第 j 个总体中的样本数；$n=\sum\limits_{j=1}^{k}n_j$，$p$ 为总体维数；$Q^{(j)}$是第 j 总体的样本离差(平方和)矩阵，Q 是将全部 n 个样本合在一起做一组时样本的离差平方和(注意不同于 **3.** 中的 Q_0)。

Kendall 指出，当 n 充分大时，近似地有

$$-2\ln\lambda_4 \sim \chi^2\left[\frac{1}{2}p(p+1)(k-1)\right] \tag{6.98}$$

按信度 α 查出临界值 χ_α^2 后，当

$$-2\ln\lambda_4 \geqslant \chi_\alpha^2\left[\frac{1}{2}p(p+1)(k-1)\right]$$

时，拒绝原假设。反之亦然。

5. 回归系数显著性检验

在第六章第五节中介绍了多对多的线性回归，实际应用时，有时自变量和因变量的分量都很多，自变量的某些分量与因变量的某些分量之间未必都有显著的相关关系。带着这些分量进行计算致使工作量过大，且有时还会掩盖一些主要关系，因此希望将“无关重要的”分量从回归方程中剔除。

若因变量 $\boldsymbol{Y}$ 是 p 维向量，自变量 $\boldsymbol{X}$ 是 q 维向量，$\boldsymbol{Y}$ 对 $\boldsymbol{X}$ 的多元回归方程式为

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{10} + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1q}x_q \\ y_2 &= a_{20} + a_{21}x_1 + \cdots + a_{2q}x_q \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_p &= a_{p0} + a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pq}x_q \end{aligned}\right\} \tag{6.99}$$

若要检验 $x_{r+1}, \cdots, x_q$ 是否对 $\boldsymbol{Y}$ 有影响(注意 $\boldsymbol{X}$ 的分量是可任意编号的，这里不妨假定的是 $q-r$ 个分量是 $\boldsymbol{X}$ 的最后 $q-r$ 个)，根据理论上的推导，可以构成统计量

$$\Lambda = \left|\frac{\boldsymbol{Q}_\Omega}{\boldsymbol{Q}_\omega}\right| \tag{6.100}$$

则 Λ 的值很接近 1 表示假设正确，与 1 相差越远表示假设越不正确。可以证明，有

$$\Lambda \sim \Lambda(p, n-q-1, q-r) \tag{6.101}$$

这里，p 是向量 $\boldsymbol{Y}$ 的维数，n 为样本数；q 为 $\boldsymbol{X}$ 的维数，$q-r$ 是欲检查其系数是否为零的 $\boldsymbol{X}$ 的分量个数，具体的检验方法如下：

1) 用自变量 $\boldsymbol{X}$ 的全部数据与因变量 $\boldsymbol{Y}$ 建立回归方程，并按(6.66)式计算无限制情况下的 $\boldsymbol{Q}_\Omega$；

2) 用 $\boldsymbol{X}$ 的前 r 个分量的数据 X_i 与因变量 $\boldsymbol{Y}$ 建立回归方程，仍按(6.66)式计算限制情况下的 $\boldsymbol{Q}_\omega$；

3) 令

$$\Lambda = \frac{|Q_\Omega|}{|Q_\omega|}$$

4）按信度 α 查 Λ 分布表得临界值 Λ_α；

5）若 $\Lambda \leqslant \Lambda_\alpha$，则拒绝原假设，即认为 $x_{r+1},\cdots,x_q$ 对 $\boldsymbol{Y}$ 有影响；反之亦成立。

当 p 或 $n_2(=q-r)$ 值较大时，可令

$$v = -\left[(n-1) - \frac{p+q+r-1}{2}\right]\ln\Lambda \tag{6.102}$$

则当 $v \geqslant \chi_\alpha^2[p(q-r)]$ 时，拒绝原假设。

第七节　判别分析

在第六章第四节中介绍过样本分类问题，是在事先毫无关于“类”的知识情况下应用的。与此相对的在实际工作中，有时事先已有类的划分，或事先分好了“类”，需要的是判断那些还未分类的样本究竟属于当哪一类。判别分析就是解决这类问题的一种数学方法，也有文献称其为有监督分类。

一、距离判别

若某问题事先已有 m 类的知识，不妨可将每类视为一个总体，设每个总体都是 p 维变量，第 j 类 G_j 的均值向量为 $\boldsymbol{\mu}_j$，协方差阵为 $\boldsymbol{\Sigma}_j(j=1,2,\cdots,m)$。现有一样本 $\boldsymbol{Y}$，要判断它属于哪一个总体，将其归类。一个最直观的想法，就是计算一下 $\boldsymbol{Y}$ 到各总体之间的距离 $d(Y,G_j)$，且将 $\boldsymbol{Y}$ 归入离它最近的那一类，剩下的问题是采用何种距离合适？

如果各总体服从正态分布，且 $\boldsymbol{Y}$ 确属于第j 总体，即 $\boldsymbol{Y}\sim N_p(\boldsymbol{\mu}_j,\boldsymbol{\Sigma}_j)$。根据直交变换理论，必存在一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，使 $\boldsymbol{A\Sigma}_j\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$。又令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\mu}_j)$，易见 $\boldsymbol{X}\sim N_p(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I})$。从而，有

$$(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\mu}_j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_j^{-1}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\mu}_j) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \sim \chi^2(p) \tag{6.103}$$

若令

$$d^2(Y,G_j) = (\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\mu}_j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_j^{-1}(\boldsymbol{Y}\sim\boldsymbol{\mu}_j)$$

它只与维数 p 有关,而与其他因素无关。可见,采用马氏距离做判别是合适的。

如果总体均值与方差未知,可用样本均值和方差来代替,公式也相应换成

$$d^2(Y,G_j) = (\boldsymbol{Y} - \overline{\boldsymbol{X}}_j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_j^{-1}(\boldsymbol{Y} \sim \overline{\boldsymbol{X}}_j)$$

在遥感技术的应用研究中,利用卫星磁带的各波段光强度进行土地类型分类是一个重要内容。一般地是,首先将研究地区分成 m 个类型,想像将各类型分成大小相同的许多样地,在每个类型中抽取一部分地作为训练样地。测定每个训练样地四个波段的光谱度(4,5,6,7 四个波段),用以估计各类型(总体)的均值和协方差阵。然后依次判断各样地所属类型,从而达到将全部土地进行分类的目的。

以上讨论地是各总体协方差矩阵不等时距离判别的方法。这时,为计算协方差需要较多的样本,且又需分别算出各方差阵的逆阵,计算工作量较大。特殊情况下,如果已知各总体协方差阵相同,至少这样的假设不被拒绝时,可采用如下距离判别的方法。

假定 m 个总体协方差阵相同但未知,在每个总体中各抽取 $n_1,\cdots,n_m$ 个样本,分别算出各总体的均值向量 $\overline{\boldsymbol{X}}_j$ 和离差阵 $\boldsymbol{Q}_j$,令

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1 + \cdots + \boldsymbol{Q}_m \tag{6.104}$$

则 $\dfrac{\boldsymbol{Q}}{n-m}$ 是各总体公共协方差阵的无偏估计值,其中 $n = \sum_{j=1}^{m} n_j$。如用 $\boldsymbol{Q}$ 去代替 $\boldsymbol{Q}_j$,这就增加了自由度,也可以提高精度。则将

$$d^2(Y,G_j) = n(\boldsymbol{Y} - \overline{\boldsymbol{X}}_j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_j^{-1}(\boldsymbol{Y} - \overline{\boldsymbol{X}}_j)$$

可直接改写成

$$d^2(Y,G) = (\boldsymbol{Y} - \overline{\boldsymbol{X}}_j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{Y} - \overline{\boldsymbol{X}}_j) \tag{6.105}$$

这里,由于 n 为常数,为了计算数字简单而被省略。它并不影响分类结果。

顺便指出,经实地验证判别结果有时也有判别错误的时候,造成判错的原因主要有两方面,一是由于样本数较少,对方差阵估计的误差较大;二是由于某些地类光谱数值接近。例如,针叶林和阔叶林之间有时容易判错,而竹林和水地之间一般不会判错。因为距离判别是以各样本观测值与各类均值之间距离大小来判定样本归属的。假定各样本遵从正态分布,则样本观测值出现的概率可用图 6.1 表示。图中 $\overline{X}_1$ 和 $\overline{X}_2$ 表示两个地类的均值,Y_1 和 Y_2 表示待判的两个样本。显然,像

Y_1 这样的样本它属于第一总体的可能性很小，一般不会判错；像 Y_2 这种情况，它距 $\bar{X}_2$ 较近，按判别规则应将它判归第二总体，但它也同样落在第一总体之内，属于它的可能性尽管较小，但总是有可能发生的，这与不能认为"被拒绝的假设都一定是错误的假设"一个道理，因而也就有可能判错。

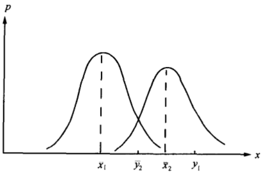


图 6.1

可以直观地看出，如果 $\bar{X}_1$ 与 $\bar{X}_2$ 相距越远，或第一、第二两个总体方差越小，出现判错的可能性越小。

二、Bayes 判别

贝叶斯判别属权函数方法的一项应用。采用此法应知道各总体 G_j 的概率分布密度 $f_j(\boldsymbol{Y})$，以及各总体占全部总体的权重 w_j 和判断损失(风险) $L(i,j)$。

已知 k 类 $G_1,\cdots,G_k$，每类皆为 p 维总体，分别具有分布密度 $f_1(\boldsymbol{X}),\cdots,f_k(\boldsymbol{X})$。现任取一个样本 $\boldsymbol{Y}$，它属于 G_j 的事前(验前)概率为 w_j，根据这些资料如何判断 $\boldsymbol{Y}$ 属于哪个总体呢？

因为一个样本 $\boldsymbol{Y}$ 是 p 维空间中的一个点，设想整个 p 维空间分成了 k 块，分别记为 $D_1,\cdots,D_k$。若样本 $\boldsymbol{Y}$ 落入 D_j，就将 $\boldsymbol{Y}$ 判定属于 G_j 总体，关键是如何划分这些块。

假定 $\boldsymbol{Y}$ 实际属于 G_i，而将其判定属于 G_j 时所造成的损失是 $L(i,j)$。造成这一损失的概率为

$$p(j \mid i) = \int_{D_j} f_i(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X} \qquad (i \neq j) \tag{6.106}$$

于是，通过划分 $D_1,\cdots,D_k$ 来进行判断造成的平均损失为

$$g(D_1,\cdots,D_k) = \sum_{i=1}^{k} w_i \sum L(i,j)p(j \mid i) \tag{6.107}$$

注意,这里恒取

$$L(i,i) = 0 \tag{6.108}$$

说明没有判错就没有损失。

按风险最小的原则,如果取

$$D_1 = \{\boldsymbol{Y} \mid h_1(\boldsymbol{Y}) \leqslant h_j(\boldsymbol{Y});\ j = 1,2,\cdots,k\} \tag{6.109}$$

式中:

$$h_1(\boldsymbol{Y}) = \sum_{i=1}^{k} w_i f_i(\boldsymbol{Y}) L(i,1) \tag{6.110}$$

则能使平均损失 $g(D_1,\cdots,D_k)$达到最小。

(6.109)式的意思是抽取一个样本 $\boldsymbol{Y}$,按(6.110)式分别算出 $h_1(\boldsymbol{Y})$, $h_2(\boldsymbol{Y}),\cdots,h_k(\boldsymbol{Y})$,若这 k 个数中最小的是$h_1(\boldsymbol{Y})$,则认为 $\boldsymbol{Y}$ 落入D_1,即判定 $\boldsymbol{Y}$ 属于G_1。这样的判别方法称之为贝叶斯判别准则。

至于各总体的分布密度 $f_j(\boldsymbol{Y})$,权重 w_j 以及引进的损失$L(i,j)$,这些函数或数字可由理论分析或根据已有资料或预备调查确定。例如,权重 w_j 一般可由历史资料或预备调查估计出来,如毫无这方面资料,实用时也可取等权 $w_j = 1(j = 1, 2,\cdots,k)$。有时,取损失函数为

$$L(i,j) = 1 - \delta_{ij}$$

式中:$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & 当\ i = j \\ 0 & 当\ i \neq j \end{cases}$,即如果判对,则无损失;如果判错,不论什么错,皆认为损失为 1。根据所讨论问题的不同,当然也可以取经济目的来确定损失函数。

如果取 $L(i,j) = 1 - \delta_{ij}$,将其代入(6.110)式,有

$$h_1(\boldsymbol{Y}) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} w_i f_i(\boldsymbol{Y}) = \sum_{i=1}^{k} w_i f_i(\boldsymbol{Y}) - w_1 f_1(\boldsymbol{Y}) \tag{6.111}$$

由于 $\sum_{i=1}^{k} w_i f_i(\boldsymbol{Y})$ 在样本 $\boldsymbol{Y}$ 一旦取定后就变为一个常数，因此空间划分公式(6.109)变为

$$D_1 = \{\boldsymbol{Y} \mid w_i f_i(\boldsymbol{Y}) \geqslant w_j f_j(\boldsymbol{Y}), j = 1,2,\cdots,k\} \tag{6.112}$$

如果 G_j 是正态分布，即

$$f_j(\boldsymbol{Y}) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}_j)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}_j^{-1} (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}_j)\right\}$$

相应的判别条件 $w_1 f_1(\boldsymbol{Y}) \geqslant w_j f_j(\boldsymbol{Y})$ 可以改写成

$$(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}_j)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}_j^{-1} (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}_j) - 2\ln w_j \geqslant (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}_1)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}_1) - 2\ln w_1 \tag{6.113}$$

也就是说，如果定义样本 $\boldsymbol{Y}$ 与 G_j 总体的距离为

$$d^2(\boldsymbol{Y}, G_j) = (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}_j)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}_j^{-1} (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}_j) - 2\ln w_j \tag{6.114}$$

则贝叶斯判别与距离判别步骤一样。特别是，若取所有的 $w_j = 1$ 时(等权)，贝叶斯判别就是以马氏距离为基础的距离判别。或者说，距离判别是贝叶斯判别的特殊情况。

最后指出，以上讨论的两种判别分析的方法，主要适用于定量数据。如果深入下去，还可引出一个线性判别函数，将判别分析的问题化成求一个线性判别函数 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$ 及常数 $\boldsymbol{b}$ 的过程，这就是所谓的 Fisher 判别准则。这种判别方法还可推广到含有定性数据的情况。限于篇幅，在此从略。

思考题与习题

1. 多元样本的均值 $\bar{\boldsymbol{X}}$，中心化数据 $\boldsymbol{V}$ 以及标准化数据是如何定义的？各自具有的几何意义是什么？

2. 欧氏距离与马氏距离各具有什么性质？改正数的平方和 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}$ 是一种距离吗？

3. 设 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_P)^{\mathrm{T}}$ 是协方差阵为

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{12} & \sigma^2 & \sigma_{14} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{14} & \sigma^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{14} & \sigma_{13} & \sigma_{12} & \sigma^2 \end{bmatrix}, \sigma_{12} \geqslant \sigma_{13} \geqslant \sigma_{14} \geqslant 0$$ 的 $P \times 1$ 维随机向量，求 $\boldsymbol{X}$ 的主分量。

4. 请考虑并叙述一下：求误差椭圆的长、短半轴 E、F 与主分量分析有何异同的地方？

5. 叙述聚类分析中的最小距离法的分类步骤。你认为哪种聚类分析的方法较好些？

6. 多元线性回归系数的求解过程与控制网按间接观测处理过程有何异同？

7. 两种软件 A 和 B 对地物点自动识别进行试验，实验结果如下表所列：

点 / 提高 / 软件	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A(X_1)$	1.9	0.8	0.11	0.1	−0.1	4.4	5.5	1.6	4.6	3.4
$B(X_2)$	0.7	−1.6	−0.2	−1.2	−0.1	3.4	3.7	0.8	0.6	2.0

其中提高地物点准确位置的单位为 0.1mm。在给定的显著性水平 0.01 和 0.05下，检验原假设 $H_0: \mu = \mu_0$。

8. 若模板数据为 $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 2126.10 & \\ & 1695.92 \end{bmatrix}$，未知目标的特征数据为 $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 2219.92 & \\ & 1826.37 \end{bmatrix}$，其中 $n = 879$。取显著性水平 $\alpha = 0.003$ 时的临界值 $\chi^2_{0.003}(3) = 15.0$，试按最大似然比法进行协方差矩阵的检验假设 $H_0: \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0$。

9. 判别分析是根据个体的某些特征，将它归入若干总体之一的方法，那么造成错判的原因是什么？

10. 贝叶斯判别与距离判别有什么关联？

第七章　空间数据质量控制与抽样检验

第一节　质量管理与控制的一般概念

空间数据的质量是GIS生存和发展的保障，缺少质量指标的GIS和其他产品一样，将无法得到用户的信任。

一、关于质量的几个概念

1．质量管理的对象

产品的质量就是产品的适用性，美国一位著名的质量管理专家认为：质量是“产品在使用时能成功地满足用户需要的程度”。质量不是一个固定不变的概念，而是动态的、变化的、发展的。用户对产品质量要求的“满足程度”则反映在对产品的性能、经济特性、环境特性，服务特性等方面。因此，质量是一个综合的概念。

不难理解，产品质量是有形的质量，服务质量是无形的质量。“用户需要”一般可转化成有指标的特征和特性，包括实用性、安全性、可靠性、维修性、有效性等方面。

质量有狭义质量和广义质量之分。狭义质量是指产品质量；而广义质量是指一切质量，即除产品质量外，还包括服务质量和工作质量等。

2．质量特性

产品满足人们某种需要而具备的属性和特征称为质量特性。根据不同的使用要求和使用目的，不同的产品具有不同的质量特性，有内在特性，如结构、强度、精度等；有外在特性，如形状、色泽；有经济特性，如成本、价格、维修费用等。综合起来，可归纳成性能、寿命、可靠性、维修费用和经济性5个方面的质量特性值。所谓产品的适用性就是建立在这些质量特性值的基础之上的。通过对产品质量的定性化或定量化，可以得到产品质量的标准。

3．质量管理

质量管理是全部管理职能的一个方面，它的职能是负责质量方针的制定和实

施。是企业求生存图发展的最关键性的工作之一。

4．质量控制

为达到对质量的预期要求所采取的作业技术和活动称作质量控制。其任务是及时发现作业技术和活动是否偏离技术设计或有关规范，保障生产过程正常达到控制产品质量的目的。

5．质量体系

质量体系是指为实施质量管理，由组织机构、组织程序、过程和资源构成的有机整体。是为满足质量目标的需要建立的综合体。建立质量体系是质量管理的核心问题。

二、质量管理发展的三个阶段

根据世界上各发达国家推行质量管理的实践来看，质量管理的发展大致可以分为三个阶段。

1．质量检验阶段

这个阶段的质量管理主要手段是，通过严格的检验程序来控制产品的质量，并根据预定的质量标准对产品的质量进行判断。

在这一质量管理的初级阶段，通常是将设计、制造和检验分属三个部门，形成“三权分立”，对产品质量标准的严肃性有好处，各部门的质量责任可得到严格地划分。不足之处在于，这种事后检验无法在生产过程中“预防”或“控制”不合格品的生产。同时，这种全数检验对于大批量或破坏性的检验是不经济实用的。

2．统计质量管理(SQC)阶段

这一阶段是从20世纪40年代至50年代末。其主要特点是应用数理统计原理预防不合格品的生产并检验产品的质量。质量管理工作由专职检验人员转向移交给质量控制的技术人员承担，质量管理由事后检验变为质量的预防性控制与事后检验相结合的管理方式。

3．全面质量管理(TQC)阶段

这一阶段是从20世纪60年代末至今。它是科学技术的新成就、新概念，特别是在系统科学强有力的推动下产生的。全面质量管理的对象不仅是狭义的产品质量，还包括工作质量和服务质量等广义质量；质量管理的范围不仅是生产过程，而是产品质量产生和形成的全过程，包括设计、制造和其他辅助等过程；它要求企业

中的全体职工明确企业的质量方针和目标，使每个成员都参与质量管理。它要求把客户的需要放在第一位，采取严格把关与积极预防相结合，并以预防为主，提倡用数据说话。

开展全面质量管理需要具备一定的基本条件，要做好一系列必要的基础工作，例如制定技术标准和管理标准，做好计量管理、质量情报、质量教育及建立质量责任制的工作。

第二节　统计过程控制与控制图

一、过程控制与控制图的基本格式

过程控制也称为工序控制。产品质量管理的过程控制，就是运用统计数学的方法，从工序上检验生产进程(包括管理过程以及服务过程)是否正常，及时发现和清除造成产品质量不稳定的因素，预防次品的出现。通过工序控制管理可探求产品质量变异的原因与幅度，合理地选择、配置与研究各项生产技术条件和措施，对不断提高产品质量的精密度，深化科学技术管理都有着重要意义。

过程控制的控制对象是系统因素，生产过程中只有大量的微小的偶然性因素影响产品质量时，可认为生产过程是正常的，是处于被控制状态之中，产品质量呈现稳定。反之，若有系统因素起作用，显著影响产品质量时，则认为生产过程脱离了控制状态，产品质量是不稳定的，应该删除这种系统因素。

产品质量的表现方式有三种：一种是以某项物理度量(如零件尺寸，抗压强度、抗拉强度等)表示的，即计量的；一种是以正品、次品的件数表示的，即计件(或计数)的；另一种是以产品上的疵点数表示的，即计点的。对它们的质量控制通常是通过过程(工序)控制图进行的。

控制图是一种用统计数学的方法对生产过程(或服务过程)的质量测定和记录的分析设计图。

控制图的基本格式是一张在二维坐标系中表示的图，一般取横坐标表示样本序号，纵坐标表示质量特征值。在图上画出三条与横轴平行的实线，分别是控制中心线 *CL* 和另外两条上、下控制限线 *UCL* 和 *LCL*，如图 7.1 所示。图中分为三个区，1 区为安全(正常)区，2 区为警戒区，3 区为次品区。

在实行过程控制中，必须定时抽取样本，将样本的特征值描绘在图上。如果特征值落在 1 区，且排列没有异常(指数据的波动幅度)现象，则认为生产被处于控制状态，也就是生产过程是正常的；如果特征值落在 2 区或 3 区，或者虽落在 1 区，但排列异常，则认为生产过程不正常，处于非控制状态，必须采取措施。

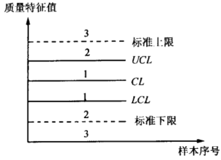


图 7.1

二、计 量 控 制

过程控制是基于生产过程中只含有大量的、相互独立的、偶然的、作用微小的诸因素影响，按照多因素影响的总和服从正态或渐近正态分布来设计控制的。

若已知某总体平均数为 μ，总体的方根差为 σ，由于约有 99.7% 的工件，其设计的标准数据会落入$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$范围之中，也就是说，只有 3‰左右的数据会超越这个范围之外，通常就以 $\mu-3\sigma$ 为控制下限，以 $\mu+3\sigma$ 为控制上限。

根据对正态总体中样本均值推断理论，过程控制中定时抽取的各样本均值 $\bar{X}$ 构成的总体服从$N(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$分布。由于衡量总体波动情况的指标 σ 一般是不知道的，常以各批抽取的子样计算出的样本方根差 S 来代替。则图 7.1 中的三条平行线可由下式确定

$$\left.\begin{aligned}\bar{X}_{UCL} &= \bar{\bar{x}} + 3\frac{S}{\sqrt{n}} \\ \bar{X}_{CL} &= \bar{\bar{x}} \\ \bar{X}_{LCL} &= \bar{\bar{x}} - 3\frac{S}{\sqrt{n}}\end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

式中：$\bar{\bar{x}}$ 是各批样本均值总体的平均值，即 $\bar{\bar{x}}=\hat{\mu}$。

由于对 S 的计算有时较繁，根据统计理论研究，对于正态分布总体来说，如果子样容量大小 n 为一定，从同一总体中抽取的子样的极差$(R=x_{\max}-x_{\min})$均值的估值与 σ 的估值之间有倍数关系，可用 $\bar{R}$ 估计σ，有 $\sigma=\frac{\bar{R}}{d_2}$，即有

$$\left.\begin{aligned}\bar{X}_{UCL} &= \bar{\bar{x}} + 3\frac{\bar{R}}{d_2\sqrt{n}}\\ \bar{X}_{CL} &= \bar{\bar{x}}\\ \bar{X}_{LCL} &= \bar{\bar{x}} - 3\frac{\bar{R}}{d_2\sqrt{n}}\end{aligned}\right\}\tag{7.2}$$

d_2 的数值是按下式计算的

$$d_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\{1 - [1 - \Phi(x)]^n - \Phi(x)^n\}\mathrm{d}x \tag{7.3}$$

式中：

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{t^2}{2})\mathrm{d}t \tag{7.4}$$

部分计算数值如下：

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
d_2	1.128	1.693	2.059	2.326	2.534	2.704	2.847	2.970	3.078	
A	0.627	0.341	0.243	0.192	0.161	0.140	0.124	0.112	0.103	
A_1	1.881	1.023	0.729	0.576	0.483	0.420	0.372	0.336	0.309	

表中的 $A = \frac{1}{d_2\sqrt{n}}$，$A_1 = 3A$。

顺便说明，用 $A\bar{R}$ 估计总体方根差时，n 不能太大，如 $n > 12$ 则估计精度很差，一般取 4 或 5；要求样本批数应当不少于 20。

上述介绍了关于 $\bar{x}$ 的控制图，如果有 $\bar{x}$ 落在控制范围外，就将该样本删除，对剩下的样本重新计算 $\bar{\bar{x}}$ 以及上、下控制线。直到全部的 $\bar{x}$ 落在控制范围内，就认为生产过程正常。实际上这种复核工作的意义也是在检验被抽取的总体是否为正态分布。

生产过程中除了控制平均水平外，还要控制数据的波动幅度。

研究表明，极差 R 也是一个随机总体，当样品个数 n 较小时(例如 $n = 5$ 或 6 时)，R 服从渐近正态分布，即也可以由多批样本的 R 计算的 $\bar{R}$ 作为该总体的平

均数。且极差总体的方根差 σ_R 与原正态总体的 σ 之间有一定倍数关系，即有 σ_R 的估值为 $d_3\sigma$，于是有 σ_R 的估值为 $\frac{d_3}{d_2}\bar{R}$。

d_3 是按下列公式计算的：

$$d_3^2 = 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x_n}\Big\{1 - \Phi(x_n)^n - [1 - \Phi(x_1)]^n + [\Phi(x_n) - \Phi(x_1)]\Big\}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_n - d_2^2 \tag{7.5}$$

式中：

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{t^2}{2})\mathrm{d}t \tag{7.6}$$

部分计算数值如下：

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_3	0.8525	0.8884	0.8798	0.8641	0.8486	0.8330	0.8200	0.808	0.797
D	0.756	0.525	0.427	0.372	0.335	0.308	0.288	0.272	0.259
D_1	—	—	—	—	—	0.076	0.136	0.184	0.223
D_2	3.268	2.575	2.281	2.116	2.005	1.924	1.864	1.816	1.777

表中的 $D = \frac{d_3}{d_2}$, $D_1 = 1 - 3D$, $D_2 = 1 + 3D$。

对 R 控制图，则有

$$\left.\begin{aligned} R_{UCL} &= \bar{R} + 3\frac{d_3}{d_2}\bar{R} \\ R_{CL} &= \bar{R} \\ R_{LCL} &= \bar{R} - 3\frac{d_3}{d_2}\bar{R} \end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

R 控制图的检验方法与 $\bar{X}$ 控制图的检验方法相似。

应用 $\bar{X}$、R 控制图来控制产品质量时，所选样本应具代表性，尽可能在生产正常和稳定的情况下收集；不同生产条件下制定不同的控制图；$\bar{X}$ 的控制上限，R 的

控制下限均有实际意义；要善于把两种控制图结合起来使用。

三、计件(计数)控制

计件控制的目的是要控制一批产品中的次废品件数或次废品比率。检验一件产品，要么合格，要么是次废品，二者必居其一，像这样的变量，它的变化将服从二项分布规律。

据数理统计理论的研究，在生产状态稳定的条件下，当 p 不太小，且样本的容量 n 较大时，由二项分布的正态渐近理论可知，次品率 p 或样本次品数 np 这个总体也属渐近正态分布。当各批 n 相同时，可用多批样本的平均次品个数 $n\bar{p}$ 为总体平均数，用 $\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$ 作为衡量总体波动的方根差指标，则样本次品数 np 的上、下控制限计算公式为

$$\left.\begin{aligned}(np)_{UCL} &= n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}\\(np)_{CL} &= n\bar{p}\\(np)_{LCL} &= n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}\end{aligned}\right\}\qquad(7.8)$$

式中：$\bar{p}=\sum p/$样本批数。若依(7.8)式作图则称 np 控制图。

由于次品数总是正数，当计算出的下限值为负数值，下限事实上不存在。

四、计 点 控 制

计点控制的目的是要控制某件或某组产品上疵点数，这种产品一般都是体积(或面积)较大的，如铸件、布匹。也有用一组产品作为一个检验单位的，如三五件铸件(要求每件上疵点数很少)等。一般地，样本疵点数形成泊松分布。当疵点的总体平均数不小于5时，可用正态分布逼近来作控制图。若用 C 表示每件产品上的疵点数，

$$\left.\begin{aligned}C_{UCL} &= \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}}\\C_{CL} &= \bar{C}\\C_{LCL} &= \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}}\end{aligned}\right\}\qquad(7.9)$$

式中：$\bar{C}$ 为各批样本的疵点数 C 的平均值；$\sqrt{\bar{C}}$ 作为衡量总体的方根差指标。

如果 $\overline{C}<5$,则应按泊松分布来计算上、下控制限。

作图及复核检验方法如前二种。

第三节 抽样检验与标准

一、抽样检验的基本概念

从被检验对象的总体中随机的抽取一部分样本进行检验,根据检验结果来判断总体的质量水平并决定全部产品是否合格的方法叫产品质量抽样检验。

选择抽样方案的原则是:对待检产品质量要有正确的估计,能真正起到质量管理的作用;抽样检验的方法简单易行,并符合经济原则。

产品质量抽样检验是通过检查一部分产品来推断整批产品的质量,因此可能犯两类估计错误:其一是"以好为坏"的错误,也称"生产者风险",记犯第一种错误的概率为 α;其二是"以坏充好"的错误,也称"消费者风险",记犯第二种错误的概率为 β。在设计抽样方案时,应尽可能地改善以高概率保证合格批被接受,而以低概率"接收"不合格批。

根据样本大小及检查费用与 α 和 β 的关系,可以通过下列方程式求得 α、β 和 n 的数值

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{Q}}{\partial \alpha} = K\dfrac{\partial n}{\partial \alpha} + (1-q)Q_1 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \overline{Q}}{\partial \beta} = K\dfrac{\partial n}{\partial \beta} + qQ_2 = 0 \end{cases} \tag{7.10}$$

式中:n 为子样容量,即所含产品数目;

总损失 Q = 检查费用 + 由于犯第一种错误引起的损失 + 由于犯第二种错误引起的损失;

令 K = 每件产品平均负担的检查费用,通常包括检验人员的工资,为检验所耗材成本,试件的损失;

Q_1 = 每犯一次第一种错误的损失;

Q_2 = 每犯一次第二种错误的损失;

q = 根据长期记录,生产不正常时的概率;

$1-q$ = 根据长期记录,生产正常时的概率;

N = 某时期(例如一年内)内送检产品的总批数;

$\overline{Q}$ = 每批平均损失。于是,有

$$Q = nKN + \alpha(1-q)NQ_1 + \beta qNQ_2 \tag{7.11}$$

$$\overline{Q} = \frac{Q}{N} = nK + \alpha(1-q)Q_1 + \beta qQ_2 \tag{7.12}$$

可见，当 K、q、Q_1、Q_2 都一定时，n 为 α、β 的函数。因此，可以通过求 Q 极小值的办法，根据(7.10)式求出 α、β 的数值。此外，还可根据以往的经验和生产技术水平决定 α、β 和 n 的数值。在国际质量标准(ISO)和我国国家标准(GB)中，也给出了一系列适用于不同情况的抽样检验标准和方案。

二、抽样检验方案

抽样检验方案可分为计数的和计量的两大类，最常用的抽检方案，以计数的为例有如下几种。

1. 一次抽检

在 N 件产品里，随机抽取 n 件进行检验，如果次品数小于 C，则认定该批产品可接受，否则拒收。C 和 n 是根据产品规格预先确定的。

当抽检方案(N；n，C)给定时，批中出现 $x=d$ 件不合格品的概率为

$$p(x=d) = \frac{C_D^d C_{N-D}^{n-d}}{C_N^n} \tag{7.13}$$

式中：p 为次品率，不合格品总数为 $D=Np$。

对于随机样本数 n，次品数 d 不大于 C 的概率为

$$L(p) = \sum_{d=0}^{C} \frac{C_D^d C_{N-D}^{n-d}}{C_N^n} \tag{7.14}$$

该式表示的是接收概率或称批合格率。

当 $N \geqslant 10n$ 时，可用二项分布近似计算接收概率，有

$$L(p) = \sum_{d=0}^{C} C_n^d p^d (1-p)^{n-d} \tag{7.15}$$

当 $N \geqslant 10n$，且 $p \leqslant 0.1$ 时，也可用泊松分布近似计算接收概率，有

$$L(p) = \sum_{d=0}^{C} \frac{(np)^d}{d!} e^{-np} \tag{7.16}$$

如果抽检方案($N;n,C$)固定不变,分别取大、小不等的次品率 p,计算其接收概率,可得到如图 7.2 所示的一条抽样特性曲线(或称 OC 曲线),这里不妨取($n=20, C=0$),为了比较,取批量 $N=50, N=100, N=1000$ 构成 3 组数据。在图 7.2中绘出 3 条曲线。

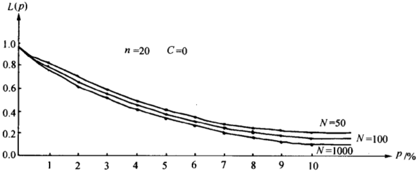


图 7.2

由图中可见,批量 N 对 OC 曲线的影响不大;产品质量与接收概率成正比;不同的抽检方案对应着不同的 OC 曲线,OC 曲线具有区分抽检方案的接收与拒收能力的作用。

2. 二次抽检

两次抽检的基本方法是:从批量 N 中随机抽取 n_1 件观察,如其中次品个数 d_1 不大于某一指定数 C_1 就认为合格;若大于另一指定 C_2 就认为不合格;当 d_1 落在 C_1 与 C_2 之间时,则须再随机抽取一个样本 n_2 检验,若 $d_1+d_2 \leqslant C_2$,也就认为此批产品合格;若 $d_1+d_2>C_2$,就认为此批产品不合格。显然,两次抽检方案比一次抽检方案更精确。记两次抽检方案为($N;n_1,n_2,C_1,C_2$),若次品率为 p,可得其接收概率为

$$L(p) = L_1(p) + L_2(p) \tag{7.17}$$

式中:

$$L_1(p) = \sum_{d_1=0}^{C_1} \frac{C_{Np}^{d_1} C_{N-Np}^{n_1-d_1}}{C_N^{n}} \tag{7.18}$$

$$L_2(p) = \sum_{d_1=C_1+1}^{C_2} \left[\frac{C_{Np}^{d_1} \quad C_{N-Np}^{n_1-d_1}}{C_N^{n_1}} \sum_{d_2=0}^{C_2-d_1} \frac{C_{N-n_1-Np-d_1}^{n_2-d_2}}{C_{N-n_1}^{n_2}} \right] \tag{7.19}$$

$L_1(p)$和$L_2(p)$表示第一、二次抽检的接收概率。

当$N \geqslant 10n$，且$p \leqslant 0.1$时，常用泊松分布计算，有

$$L(p) = \sum_{d_1=0}^{C_1} \frac{(n_1 p)^{d_1}}{d_1!} e^{-n_1 p} + \sum_{d_1=C_1+1}^{C_2} \left[\left(\frac{(n_1 p)^{d_1}}{d_1!} e^{-n_1 p} \right) \sum_{d_2=0}^{C_2-d_1} \frac{(n_2 p)^{d_2}}{d_2!} e^{-n_2 p} \right] \tag{7.20}$$

顺便指出，两次抽检方案并不一定每次必抽两个样本，如果第一个样本能做出合格与否的判断，就无须做第二次抽样了。此外，还有多次抽检以及序贯抽检方案等，限于篇幅，不再赘述。

三、抽样检验标准概述

1. 计数标准型抽检

为保护生产者和消费者双方的利益，将两种风险都固定为某个特定数值的抽样检验称之为标准型抽检。

前已述及，在抽样检验中，冒两种风险是不可避免的，为控制这两种风险，往往规定两个次品率p_0和p_1（$p_1 < p_0$），一般称p_1为极限次品率。当一批产品的批不合格率$p < p_0$时，认为这批产品质量较好，应该以大概率接收（或以小概率拒收），通常将拒收概率控制在不大于α之内；而当$p > p_1$时，就认为这批产品的质量较差，应当以小概率接收（或以大概率拒收），通常将接收概率控制在不大于β之内。则有

$$\left. \begin{aligned} L(p_0) &= 1 - \alpha \\ L(p_1) &= \beta \end{aligned} \right\} \tag{7.21}$$

如果生产者与消费者协商取定p_0、p_1与α、β，则可由下列方程组得到抽检方

案中的 n 和 C 两个参数

$$
\begin{cases}
1-\alpha=\sum_{d=0}^{C}\frac{(np_0)^d}{d!}e^{-np_0} \\
\beta=\sum_{d=0}^{C}\frac{(np_1)^d}{d!}e^{-np_1}
\end{cases}
\tag{7.22}
$$

实用中,常对几种不同水平的 p_0、p_1 和 α、β 按(7.22)式计算出 np_0 和 C 值并编制成表(见附表三),便于制定出标准型一次抽样方案。

[例 7-1]:设 $p_0=0.04$, $p_1=0.10$, $\alpha=0.05$, $\beta=0.10$,求一次抽样方案中 n 和 C。

解:因鉴别比 $p_1/p_0=2.5$

查看附表三中 $\alpha=0.05$ 和 $\beta=0.10$ 的相应栏,找到最接近鉴别比2.5的值为2.497,因此我们选取 $C=10$;而对应于 $np_0(\alpha=0.05)$ 那一栏里的 $np_0=6.169$,因此,有

$$
n=\frac{6.169}{0.04}\approx 154
$$

即所求抽样方案为(154, 10)。

2. 计数调整型抽检

计数调整型抽样检验标准适用于长期连续生产和验收的单位产品。其特点是可以调整检验的宽严程度,若初次检验认为生产方提供的批质量是好的,则可以放宽检验;反之,若认为质量差,则须加严检验以促使生产方尽快提高产品质量。

计数调整型抽样检验是目前世界上应用最普遍的抽样检验方案。国际标准化组织的 ISO2859 和我国的 GB2828 就是根据计数调整型抽样检验原理制定的标准。

3. 计数挑选型抽检

这种抽样检验方案的特点是对检验合格的批由销售方整批接受,对检验不合格的批进行全数检验,把不合格单位产品用合格品代替后才由销售方接收。

具体的抽检方案可分两种,一种是控制极限质量抽检;另一种是控制平均检后次品率的上限的抽检。

所谓控制极限质量就是控制 p_t 和相应的消费者风险 β 的条件下,使平均检验

件数为最小。极限质量 p_t 也就是(7.21)式中的 p_1。若采用挑选型一次抽检方案 (n, C)，可先按(7.23)式计算过程平均，也就是计算一系列初次提交的样本批的平均质量

$$\bar{p} = \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} \times 100\% \tag{7.23}$$

式中：n_i 为样本容量；d_i 为相应的次品数，$i = 1, 2, \cdots, k$。

接收概率可用泊松分布表示为

$$L(\bar{p}) = \sum_{d=0}^{C} \frac{(n\bar{p})^d}{d!} \mathrm{e}^{-n\bar{p}} \tag{7.24}$$

而拒收的概率应为 $1 - L(\bar{p})$。因此，挑选型一次抽样方案的平均检验件数为

$$\bar{I} = nL(\bar{p}) + N[1 - L(\bar{p})] \tag{7.25}$$

若预先给定 p_t 和 β（一般取 $\beta = 0.10$），则可由

$$\beta = \sum_{d=0}^{C} \frac{(np_t)^d}{d!} \mathrm{e}^{-np_t} \tag{7.26}$$

解得多组 (n, C)，再将其代入(7.25)式求得与各组相应的平均检验件数 $\bar{I}$。对应最小 $\bar{I}$ 的 (n, C) 即为要寻找的方案。实用上也有人编制出相应的表格供查用。

所谓控制平均检后次品率上限的抽检方案，就是在限定上限的条件下，使平均检验件数 $\bar{I}$ 达到最小的抽检方案。

若一次抽检方案为 (n, C)，产品总体的次品率为 p，其接收概率为 $L(p)$，其检后平均不合格率为

$$AOQ = \frac{N - n}{N} pL(p) \tag{7.27}$$

通常 $N \gg n$，上式右端第一项 ≈ 1，因此

$$AOQ \approx pL(p) \tag{7.28}$$

由于 AOQ 是 p 的函数，对于方案 (n, C)，可通过对(7.27)和(7.28)式求极值的方

法，得到 AOQ 的最大值（$AOQL$）和相应的 p 值及 n、C 的关系式。当然，也可以借助（7.25）式求解平均检验件数 $\bar{I}$，而由一系列 $\bar{I}$ 值确定出使 $\bar{I}$ 为最小的（n，C）。按这样原理也可编制出相应的抽检方案表。

第四节　GIS数据的质量特征

一、空间数据的质量特性

数据位置的精度直接影响数据的应用。位置精度是在数据集合（例如地图）中物体的地理位置与其真实的地面位置之间的差别，通常的检验方法是按规定的方式选择一些特定的样本点与另外一个精度更高的独立信息源的定位坐标相比较。同一般的精度含义一样，定位精度也包含着准确性和精密性两个概念。准确性是通过偏差，也就是真实位置与表达位置的系统差别来描述的，理想的偏差应当是零，表明图上位置与表达位置没有系统偏差。偏差一般由样本的平均位置误差度量。

精密性是通过对所选的测试点的标准离散差的计算进行估计的。离散差的大小表明位置误差的取值范围是疏散还是紧凑，若取值范围较小，说明量测的数据精度较高，使用的可信度也较高。位置精度的度量通常用测量中的方根差来表述。

1．数学基础

图廓点，公里格网，经纬线交点，控制点等的坐标值应正确，在回放图上，上述各点的点位误差不超过 ±0.1mm，图廓线边长误差不超过 ±0.2mm，图廓对角线误差不超过 ±0.3mm。

2．平面精度

采用全野外数字测量或摄影测量获取的由实测数据生成的数字地形图或数字地籍图，地物点（及界址点）对相邻控制点位置中误差以及相邻地物点间的间距中误差不得大于相应比例尺测图规范的规定。

由内业数字化（及扫描矢量化）采集数据的数字产品，其误差以偏离中心位置为衡量标准，主要地物的误差不得超过 0.2mm，次要地物的误差不得超过 0.3mm，线状目标位移中误差不得大于 ±0.35mm。

3．高程精度

实测数据的数字地图其高程注记点和等高线对相邻高程控制点的高程中误差不得大于相应比例尺测图规范的规定。

内业数字化采集的数字地图其高程点的高程值应正确，等高线的高程不应与

相邻高程点或地物产生地理适应性矛盾，并能显示该地区的地貌形态特征。

二、属性数据的质量特性

GIS数据不能简单地与CAD数据划为等同的是重要特征之一。GIS空间数据实体具有被描述的属性，属性数据说明空间实体数据的几何类型，分类分级、数据特征、质量描述、地理名称、更新日期等。属性数据按性质、内容、存储方式、与空间数据关系的密切性，又可以分为两类。第一类为与空间实体数据紧密相关的、用于区分空间数据实体的基本属性类，它们可以是空间数据惟一标识符、分类代码，几何类型(点线面)、数据的所有者或采集者、数据来源、数据建立日期、数据精度、与其他空间实体之间的关系代码(点线面的组成关系、相邻关系等等)等信息，这类属性的质量控制是GIS属性数据质量控制的重点。第二类是描述空间实体专业特性的专题属性数据，这类属性数据因应用专业不同而异，例如地籍管理的GIS中，属性数据可以保含土地等级、土地权属性质、土地用途等，这类属性数据大多由专门的数据库管理系统(DBMS)存储管理，通过一定的方法与GIS数据库相连。

GIS的属性数据的质量特性包括：

1）描述空间数据的属性项定义(包括名称、类型、长度等)必须正确，属性表中各数据项的属性取值及其单位不能异常。

2）标识码是区分标识空间数据的码，必须惟一有效，不重复。

3）空间数据与其属性数据之间一一对应，其相关性要正确，若具有一个以上的属性表时，各属性之间的相关性和网络层次应正确描述和建立。

三、空间数据之间的关系

GIS中空间实体点线面之间的6种组合表达了实体间拓扑关系的相邻性、连续性、闭合性、包含性，一致性等关系，是地理空间数据处理分析的依据，因此，空间实体间关系的质量特性(也称逻辑一致性)是不可忽视的。

为使地理要素能真实地再现地貌特征，无地理适应性矛盾，同类实体与不同类实体间必须正确客观地反映地理实体间结构关系，且相关位置正确，包括：

1）空间实体的点线面类型定义必须正确。

2）保证多边形空间实体的封闭性。

3）保证线状空间实体的连续性。

4）保证组合实体与基础图形要素之间的正确相关性，例如组合实体“建筑物”，应由建筑物外墙线、其标识码，门牌号等基本要素组成。

5）保证编码不重复(组合实体，基础图形要素)。

6）保证符合组合实体间和基础图形要素之间的关系原则，其中包括：

连接——如墙与墙可以连接，但墙不能与铁路连接；

相交——如墙可以与道路边线相交；

共享——如墙可与台阶、楼梯、道路边线共享；

落于——如建筑物中心点应落于墙内；

包含——如墙可包含建筑物中心线。

7）保证不出现悬挂节点和伪节点，所有线状要素相交处，都应建立节点。

8）每个线状要素必须既有从左侧相关于它的面域，又有从右侧相关于它的面域。

空间数据之间拓扑关系的正确性是实现 GIS 系统数据处理和分析的基础。它的质量特性是 GIS 区别于 CAD 系统的重要内容之一。

四、数据编辑处理过程中的质量特性

GIS 的数据质量控制贯穿于资料准备、仪器准备、数据采集、编辑、分析处理、输出全过程。从编辑处理过程来看，还应重视下列特性：

1. 分层

设置不同图形层次是分类表示各种不同地物地貌要素，满足不同需求，甚至是输出不同图饰符号的手段。每个图形要素必须按定义赋予一定的图名(或号)，同一元素不能赋予一个以上图层名，每一图层只有一种要素。

2. 完备性

GIS 中的图形和属性数据、包括注记不能有错漏和偏移，数据必须完备，每组数据文件应该齐全。

3. 惟一性

图形数据应具有惟一性，不应有重复重叠。

4. 自然接边

图形数据可以按街坊、图幅、对象等进行采集，所有相邻要素的接边不能出现逻辑裂隙、几何裂隙，应保持自然。

若不能自然接边时，几何裂隙不得超过相应比例尺测图规定的接边限差，弥合处理时，应保持地物，地貌相互位置和走向的正确性。

任何数据采集方式的图形数据接边，均不允许出现逻辑裂隙。若几何裂隙超限，或地物、地貌走向交角过大无法拼接时，全野外采集的图形数据应到实地检查纠正；内业数字化采集的图形数据应检查原图。

5. 图饰质量

数字地图的最后成图形式与空间数据库中的表示内容并不相等，其数据结构要适应GIS的拓扑化处理和空间分析，根据需要也可生产满足国家制图标准的地形图，以围墙，铁丝网，栅栏、篱笆为例，在空间数据库中，它们都是赋予了不同属性的单一线条，在GIS应用中可能起界限作用，制图时则完全可以按不同的线型生成输出内容，以满足不同的需要。

屏幕显示和输出的地形图要清晰、易读，遵从国家制图标准，符号图形使用恰当准确，图形中没有点边挤压、覆盖，数据实体间的输出表达协调，无适应性矛盾，图廓整饰符合规定，内容完整。

6. 数据转换

GIS数据库中的图形数据可通过对原(白纸)图的手扶跟踪数字化和扫描矢量化、全野外数据采集、航测数字化等多种手段采集而得。属性数据也由多种字处理软件，模式识别，数据库管理系统收集输入，入库过程中常需要不同采集系统之间的数据转换，在保证数据精度、空间数据间的拓扑关系的同时，空间数据与属性数据之间的连接关系不能丢失。

第五节　数字地图产品的质量检验

一、检 验 程 序

数字地图产品实行二级检查、一级验收制。

在作业组自查互检的基础上，由科、室技检人员对产品作100%的全面检查过程称一级检查。

二级检查是由生产单位的质检部门负责的抽检过程，抽检比例一般不少于30%。

验收是由任务单位组织有关高级技术人员实施或委托主管部门的质检机构完成。交验的产品必须是经过一、二级检查后合格的产品，验收比例一般不少于10%。

数字化图的基本单位一般规定以“幅”为检查验收的基本单位。

样本采取简单随机抽样取得，按交验图幅批量数 N 的10%抽取，若 $N \leqslant 10$，样本数 $n=2$；$N>10$，且 $N\times 10\%$ 不为整数时，则取整数后加1。

检查验收的依据是：

——任务书或合同书；

——技术法规和技术标准；

——技术设计书和有关补充技术规定。

交验资料还应包括有关数据说明,例如对图形数据采集的说明;对硬件环境及数据格式的说明;对使用的原始数据的说明;对属性数据及其标准的说明,等等。

凡数据说明和资料不全或原图质量不符合要求的,承验单位有权拒绝验收。同时,检验人员要对产品质量检验的结论负责。

样本之外的图幅,若样本质量达到优、良时,可免于概查;否则,对样本中出现的重大问题或带有系统性的问题作为概查的重点。

二、空间数据的检验

数字产品大体上可分为数字线划地图(DLG)、数字栅格地图(DRG)、数字高程模型(DEM)、数字正射影像图(DOM)等。GIS 空间数据的质量检验因产品类型和数据采集的手段不同检验方法可略有不同,但检验内容大致相当,可用表说明(表 7.1)。

表 7.1

<table>
<tr><th colspan="2">检验内容</th><th>DLG</th><th>DRG</th><th>DEM</th><th>DOM</th></tr>
<tr><td colspan="2">数据基础</td><td>√</td><td>√</td><td>√</td><td>√</td></tr>
<tr><td rowspan="2">位置精度</td><td>平面</td><td>√</td><td>√</td><td></td><td>√</td></tr>
<tr><td>高程</td><td>√</td><td></td><td>√</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">接边精度</td><td>√</td><td>√</td><td>√</td><td>√</td></tr>
</table>

表中打√号的,表示应做的检验内容。

对于检测数据的处理原则是,大于 3 倍中误差的检测数据应视为粗差,不参与精度评定。凡大于 2 倍中误差的检测点,应校核检测数据,避免检测时本身出错。

检测点平面位置中误差的计算

$$\left.\begin{aligned} m_x &= \sqrt{\frac{\sum (x'_i - x_i)^2}{2n}} \\ m_y &= \sqrt{\frac{\sum (y'_i - y_i)^2}{2n}} \\ M_p &= \sqrt{m_x{}^2 + m_y^2} \end{aligned}\right\} \tag{7.29}$$

式中：x'_i，y'_i 为检测点坐标值；x_i，y_i 为数字地图中同名点的坐标值；n 为检测点个数；m_x、m_y 以及 M_p 分别为在坐标轴方向上的中误差和点位中误差。

间距中误差的计算

$$m_s = \sqrt{\frac{\sum(S'_i - S_i)^2}{2n}} \tag{7.30}$$

式中：m_s 为地物点间间距中误差；S'_i 和 S_i 分别为相邻地物点间的检测边长和在图上量取的同一边长值；n 为检测边数。

检测点高程中误差的计算

$$m_H = \sqrt{\frac{\sum(H'_i - H_i)^2}{2n}} \tag{7.31}$$

式中：m_H 为检测点高程中误差；H'_i 和 H_i 分别为检测点高程和图上同名点的高程；n 为检测点个数。

三、属性数据的检验

属性数据的检验主要包括要素分类与代码的正确性、要素属性值的正确性、与空间数据连接关系的正确性等等。检验时通过回放图与原图套合或在屏幕上逐一显示要素，依据地图要素分类代码表抽样检查要素分类属性、代码的正确性，也可按各属性值取值调出图形元素检查各属性取值的正确性以及与图形元素关系的正确性。

四、空间数据之间关系正确性的检验

空间数据之间关系正确性的检验（也称逻辑一致性和完整性），主要包括：多边形闭合精度、结点匹配精度、拓扑关系的正确性等。检测时可将回放图与原图套合，或采用屏幕漫游目视检查以及计算机程序检查面状要素是否封闭、线状要素是否连续、同一地物在不同图幅的分类、分层属性是否一致，以保证空间数据之间关系的正确性。

五、缺陷分类

为减少人为因素在产品验收中的影响，采用定缺陷的方法来量化产品检验中

出现的各类问题,采用缺陷扣分法来评价产品质量。按着问题对产品质量影响的程度,一般定义有:

1) 严重缺陷——单位产品中的极重要质量特性不符合规定,不经返工不能提供使用的。包括:

- 数据库中的数据无法读出或出现严重丢失;
- 图廓点、控制点、公里格网交点坐标值与理论值不符;
- 地物点平面或高程误差超限点数超过总点数的 5%;
- 点线面要素属性表中,字段名、字段类别、字段长、字段顺序等有误;
- 下列要素分类与代码错,属性数据错漏和要素放错层或位置不准确:图界、未定国界、界桩、界碑,特别行政区界等县级以上境界;
- 地名注错或其他错误造成主权归属错误;
- 重要地名错漏一处;
- 未按规定处理的重大政治原则问题或极严重的错漏;
- 点线面要素拓扑关系建立错误;
- 一般注记错漏超过整幅图的 15%;
- 其他极严重的错漏。

2) 重缺陷——单位产品的重要质量特性不符合规定,对用户有重大影响的。包括:

- 国家一二等级三角点、水准点及城市Ⅰ级控制以上的等级点错、漏或其属性数据错一处;
- 主要公路或国家主要铁路错误、漏绘或其属性数据错;
- 面状要素未封闭或一个面状要素不止一个标识点;
- 高压线、管道漏错 10cm 以上;
- 境界错、漏,放错层或属性错;
- 一般地名错漏率超过总数的 5%;
- 高程注记小数点前数字错;
- 大面积水库,双线河流、山脉等名称错漏;
- 作为图名的图内名称注记错漏;
- 有方位意义的重要独立地物错漏一处;
- 地物点平面或高程误差超限,每三个计为一个。

3) 一般缺陷。包括:

- 要素几何图形不接边一处,或属性不接边一处;
- 说明注记错三处计为一个;
- 出现悬挂节点、结点匹配限差超限等五处计为一个;
- 居住地名称注记或水系等名称错漏;
- 一般要素放错层;
- 要素重复输入二次;

- 独立地物错漏三处计为一个；
- 超过图上 $4cm^2$ 的面状要素属性错、漏；
- 平面或高程误差超限一处；
- 高程点与其注记缺一，三处计为一个；
- 不属于上述缺陷的其他问题。

对于 DOM、DRG 及 DEM 等空间数据产品，由于产品质量特性略有不同，其缺陷定义及内容也会有所差异。

六、质 量 评 定

1. 单位产品质量评定

每单位产品预置 100 分，严重缺陷扣 42 分；重缺陷扣 12 分；一般缺陷扣 1 分。

扣分标准中，可加入缺陷值调整系数 W/S，W 为单位产品的定额工天，S 为单位产品的平均困难类别定额工天，也即重缺陷为 $12(W/S)$，一般缺陷为 $1(W/S)$。

根据缺陷出现的程度与数量得出总缺陷值，则该单位产品的分值 = 100 - 总缺陷值。若分值低于 60 分，或单位产品中出现一个严重缺陷，则认为是不合格。

单位产品优、良、合格、不合格等各品级的分值如下：

分值	90～100 分	75～89 分	60～74 分	60 分以下
品级	优	良	合格	不合格

除了采用缺陷扣分法外，也可引入加权平均法计算单位产品得分。权 p 表示产品的质量特性在评定产品质量时所占的比重。对于大比例尺数字产品，可以把检测点的平面和高程检测权定为 0.6，其他质量特性权定为 0.4。

把产品的质量特性分成若干个等级，每个等级的质量得分

$$\alpha_j = 100 - \sum_{i=1}^{m_1} 12(W/S) - \sum_{i=1}^{m_2} 1(W/S) \tag{7.32}$$

式中：α_j 为单位产品第 j 级质量得分；m_1 与 m_2 分别为相应于 j 级的质量特性重缺陷个数和一般缺陷个数；W/S 为缺陷值调整系数（W 为单位产品的定额工天，S 为单位产品的平均困难类别定额工天）。

单位产品的最后得分为

$$N = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j p_j \tag{7.33}$$

式中：p_j 为相应质量特性的权；n 为质量特性分级项数。

2. 批产品质量评定

样本中的各单位产品质量经评定后，非样本产品根据样本单位产品的质量决定是否要概查，并核实生产单位评定的产品等级，根据样本质量和概查情况作出对批产品质量最后的评定结论。

3. 检查验收报告

检查验收报告的内容包括验收工作中发现的问题及处理意见，以及验收结论。给出抽检样品的各类缺陷扣分，对抽检样品的质量做出统计分析，并以文字形式对批产品质量做出客观评价。

思考题与习题

1. 简述什么是全面质量管理(TQC)？
2. 过程控制的主要对象是什么？是基于何种理论来设计控制的？
3. 试按下述资料，确定一次抽检方案中的 n 和 C。

	p_0	p_1	α	β	n	C
Ⅰ	0.025	0.10	0.05	0.10		
Ⅱ	0.01	0.05	0.01	0.05		

4. 抽检一批白纸地形图，批量 $N=1000$，其不合格品率 $p=0.04$，试求按方案(30,1)抽检这批产品的接收概率。
5. GIS 数据质量包括有哪些特性？
6. 简述数字地图产品的质量检验程序。

附 表 一

$L(p, v)$分布表

V	0.05	0.01	V	0.05	0.01	V	0.05	0.01	V	0.05	0.01
$m=2$			$m=3$			$m=5$			$m=6$		
2	13.50	19.95	4	18.80	25.60	9	32.50	40.00	12	4.90	49.00
3	10.64	15.56	5	16.62	22.68	10	31.40	38.60	13	40.00	47.80
4	9.69	14.13							14	39.30	47.00
5	9.22	13.42							15	38.70	46.20
6	8.94	13.00	6	15.81	21.23	11	30.55	37.51	16	38.22	45.65
7	8.75	12.73	7	15.19	20.36	12	29.92	36.72	17	37.81	45.13
8	8.62	12.53	8	14.77	19.78	13	29.42	36.09	18	37.45	44.70
9	8.52	12.38	9	14.47	19.36	14	29.02	35.57	19	37.14	44.32
10	8.44	12.26	10	14.24	19.04	15	28.68	35.15	20	36.87	43.99
$m=4$			$m=3$			$m=5$			$m=6$		
7	25.80	30.80	11	14.06	18.80	16	28.40	34.79	21	36.63	43.69
8	24.06	29.33	12	13.92	18.61	17	28.15	34.49	22	36.41	43.43
9	23.00	28.36	13	13.80	18.45	18	27.94	34.23	23	36.05	42.99
10	22.28	27.68	14	13.70	18.31	19	27.76	34.00	26	35.75	42.63
			15	13.62	18.20	20	27.60	33.79	28	35.49	42.32
									30	35.28	42.07
11	21.75	27.13									
12	21.35	26.71									
13	21.03	26.38									
14	20.77	26.10									
15	20.56	25.87									
$m=7$			$m=8$			$m=9$			$m=10$		
18	48.60	56.90	24	58.40	67.10	28	70.10	78.60	34	82.30	92.40
19	48.20	56.30	26	57.70	66.30	30	69.40	78.80	36	81.70	91.80
20	47.70	55.80	28	57.09	65.68	32	68.80	78.17	38	81.20	91.20
21	47.34	55.36	30	56.61	65.12	34	68.34	77.60	40	80.70	90.70
22	47.00	54.96	32	56.20	64.64	36	67.91	77.80	45	79.83	89.63
24	46.43	54.28	34	55.84	64.23	38	67.53	76.65	50	79.13	88.83
26	45.97	53.73	36	55.54	63.87	40	67.21	76.29	55	78.57	88.20
28	45.58	53.27	28	55.26	63.55	45	66.54	75.51	60	78.13	87.68
30	45.25	52.88	40	55.03	63.28	50	66.02	74.92	65	77.75	87.26
32	44.97	52.55				55	65.61	74.44	70	77.44	86.89
34	44.73	52.27				60	65.28	74.06	75	77.18	86.59

附　表　二

$M(p, v_0, k)$分布表

($\alpha = 0.05$)

v_0 \ k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
				$m=2$					
3	12.18	18.70	24.55	30.09	35.45	40.68	45.81	50.87	55.87
4	10.70	16.65	22.00	27.07	31.97	36.76	41.45	46.07	50.64
5	9.97	15.63	20.73	25.56	30.23	34.79	39.26	43.67	48.02
6	9.53	15.02	19.97	24.66	29.19	33.61	37.95	42.22	46.45
7	9.24	14.62	19.46	24.05	28.49	32.82	37.07	41.26	45.40
8	9.04	14.33	19.10	23.62	27.99	32.26	36.45	40.57	44.65
9	8.88	14.11	18.83	23.30	27.62	31.84	35.98	40.06	44.08
10	8.76	13.94	18.61	23.05	27.33	31.51	35.61	36.65	43.64
				$m=3$					
5	19.2	30.5	41.0	51.0	60.7	70.3	79.7	89.0	98.3
6	17.57	28.24	38.06	47.49	56.68	65.69	74.58	83.37	92.09
7	16.59	26.84	36.29	45.37	54.21	62.89	71.45	79.91	88.29
8	15.93	25.90	35.10	43.93	52.54	60.99	69.33	77.56	85.72
9	15.46	25.22	32.24	42.90	51.34	59.62	67.79	75.86	83.86
10	15.11	24.71	33.59	42.11	50.42	58.58	66.62	74.57	82.45
11	14.83	24.31	33.08	41.50	49.71	57.76	65.71	73.56	81.35
12	14.61	23.99	32.67	41.01	49.13	57.11	64.97	72.75	80.46
13	14.13	23.73	32.33	40.60	48.66	56.57	64.37	72.08	79.72
				$m=4$					
6	30.37	48.63	65.91	82.60	98.90	115.0	131.0		
7	27.13	44.69	60.90	76.56	91.89	107.0	121.9	137.0	152.0
8	25.61	42.24	57.77	72.78	87.46	101.9	116.2	130.4	144.6
9	24.46	40.56	55.62	70.17	84.42	98.45	112.3	126.1	139.3
10	23.62	39.34	54.05	68.27	82.19	95.91	109.5	122.9	136.3
11	22.98	38.41	52.85	66.81	80.49	93.95	107.3	120.5	133.6
12	22.48	37.67	51.90	65.66	79.14	92.41	105.5	118.5	131.5
13	22.08	37.08	51.13	64.73	78.04	91.16	104.1	117.0	129.7
14	21.75	36.59	50.50	63.96	77.14	90.12	103.0	115.7	128.3
15	21.47	36.17	49.97	63.31	76.38	89.25	102.0	114.6	127.1
				$m=5$					
8	32.29	65.15	89.46	113.0					
9	36.70	61.40	84.63	107.2	129.3	151.5			
10	34.92	58.79	81.25	103.1	124.5	145.7			

续表

v_0 \ k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	33.62	56.86	78.76	100.0	120.9	141.6			
12	32.62	55.37	76.83	97.68	118.2	138.4			
13	31.83	54.19	75.30	95.81	116.0	135.9			
14	31.19	53.24	74.06	94.29	114.2	133.8			
15	30.66	52.44	73.02	93.03	112.7	132.1			
16	30.21	51.77	72.14	91.95	111.4	130.6			
				$m=6$					
10	49.95	84.43	117.0						
11	47.43	80.69	112.2	142.9					
12	45.56	77.90	108.6	138.4					
13	44.11	75.74	105.7	135.0					
14	42.96	74.01	103.5	132.2					
15	42.03	72.59	101.6	129.9					
16	41.25	71.41	100.1	128.0					
17	40.59	70.41	98.75	126.4					
18	40.02	69.55	97.63	125.0					
19	39.53	68.80	96.64	123.8					
20	39.11	68.14	95.78	122.7					

附　表　三

一次抽样方案检查表

	p_1/p_0			nP_0
C	$\alpha=0.05$ $\beta=0.10$	$\alpha=0.05$ $\beta=0.05$	$\alpha=0.05$ $\beta=0.01$	$\alpha=0.05$
0	44.890	58.404	89.781	0.052
1	10.946	13.349	18.681	0.355
2	6.509	7.699	10.280	0.818
3	4.890	5.675	7.352	1.366
4	4.057	4.646	5.890	1.970
5	3.549	4.023	5.017	2.613
6	3.026	3.064	4.435	3.286
7	2.957	3.303	4.019	3.981
8	2.768	3.074	3.707	4.695
9	2.618	2.895	3.462	5.426
10	2.497	2.750	3.265	6.169
11	2.397	2.630	3.104	6.924
12	2.312	2.528	2.968	7.690
13	2.240	2.442	2.852	8.464
14	2.177	2.367	2.752	9.246
15	2.122	2.302	2.665	10.035
16	2.073	2.244	2.588	10.831
17	2.029	2.192	2.520	11.633
18	1.990	2.145	2.458	12.442
19	1.954	2.103	2.403	13.254
20	1.992	2.065	2.352	14.027

	p_1/p_0			nP_0
C	$\alpha=0.01$ $\beta=0.10$	$\alpha=0.01$ $\beta=0.05$	$\alpha=0.01$ $\beta=0.01$	$\alpha=0.01$
0	229.105	298.073	458.210	0.010
1	26.184	31.933	44.686	0.149
2	12.206	14.439	19.278	0.436
3	8.115	9.418	12.202	0.823
4	6.249	7.156	9.072	1.279
5	5.195	5.889	7.343	1.785

续表

C	p_1/p_0			nP_0
	$\alpha=0.01$ $\beta=0.10$	$\alpha=0.01$ $\beta=0.05$	$\alpha=0.01$ $\beta=0.01$	$\alpha=0.01$
6	4.520	5.082	6.253	2.330
7	4.050	4.524	5.506	2.906
8	3.705	4.115	4.962	3.507
9	3.440	3.803	4.548	4.130
10	3.229	3.555	4.222	4.771
11	3.058	3.354	3.959	5.428
12	2.915	3.188	3.742	6.099
13	2.795	3.047	3.559	6.782
14	2.692	2.972	3.403	7.477
15	2.603	2.823	3.269	8.181
16	2.524	2.732	3.151	8.895
17	2.455	2.652	3.048	9.616
18	2.393	2.580	2.956	10.346
19	2.337	2.516	2.874	11.082
20	2.287	2.458	2.799	11.825

主要参考文献

A·P·塞奇,J·L·梅尔萨 .1978. 估计理论及其在通讯与控制中的应用 . 田承骏等译 . 北京:科学出版社
陈述彭等 .1999. 地理信息系统导论 . 北京:科学出版社
高士纯 .1999. 测量平差基础通用习题集 . 武汉:武汉测绘科技大学出版社
孔祥元,梅是义 .1991. 控制测量学 . 北京:测绘出版社
刘大杰,史文中 .1999. GIS 空间数据的精度分析与质量控制 . 上海:上海科技文献出版社
刘扬,张华丽 .1997. 测量数据处理及误差理论 . 北京:原子能出版社
汤国安,赵牡丹 .2000. 地理信息系统 . 北京:科学出版社
唐守正 .1984. 多元统计分析方法 . 北京:中国林业出版社
吴俊昶,刘大杰 .1985. 控制网测量平差 . 北京:测绘出版社
张世英,刘智敏 .1977. 测量实践的数据处理 . 北京:科学出版社
张祖勋,张剑清 .1996. 数字摄影测量 . 武汉:武汉测绘科技大学出版社
周兆麟,李毓芝 .1985. 数理统计 . 北京:中国统计出版社